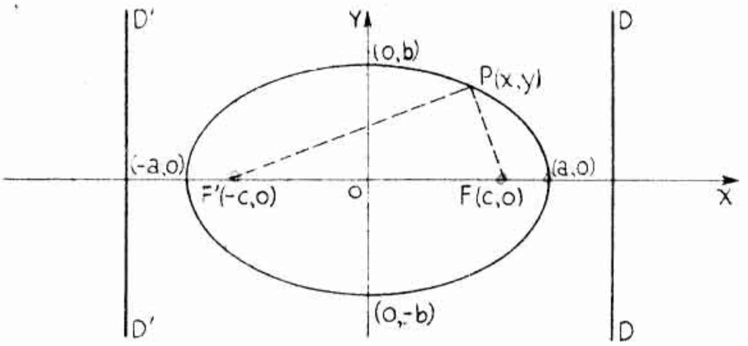
CAPITULO 6

La elipse

DEFINICION. Elipse es el lugar geométrico de los puntos cuya suma de distancias a dos puntos fijos es constante. Los puntos fijos se llaman *focos*.



Sean los dos puntos fijos $F(c, 0)$ y $F'(-c, 0)$ y $2a$ la suma constante, ($a > c$). Consideremos un punto genérico $P(x, y)$ que pertenezca al lugar. Por definición,

$$F'P + PF = 2a,$$

es decir, $$\sqrt{(x+c)^2+(y-0)^2} + \sqrt{(x-c)^2+(y-0)^2} = 2a,$$

o bien, $$\sqrt{(x+c)^2+(y-0)^2} = 2a - \sqrt{(x-c)^2+(y-0)^2}.$$

Elevando al cuadrado y reduciendo términos semejantes,

$$cx - a^2 = -a\sqrt{(x-c)^2+(y-0)^2}.$$

Elevando al cuadrado y simplificando, $(a^2-c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2-c^2)$.

Dividiendo por $a^2(a^2-c^2)$ se obtiene la ecuación $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{a^2-c^2} = 1$.

Como $a > c$, a^2-c^2 es positivo. Haciendo $a^2-c^2 = b^2$, resulta la ecuación de la elipse en la forma

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

o bien, $$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2.$$

Como esta ecuación solo contiene potencias pares de x e y, la curva es simétrica con respecto a los ejes de coordenadas x e y, y con respecto al origen. El punto O es el centro de la elipse y los ejes se denominan *eje mayor* y *eje menor*.

Si los focos fueran los puntos de coordenadas $(0, c)$ y $(0, -c)$, el eje mayor estaría sobre el eje y, con lo que la ecuación resulta de la forma $\dfrac{x^2}{b^2} + \dfrac{y^2}{a^2} = 1$.

La *excentricidad* $e = \dfrac{c}{a} = \dfrac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$, o bien $c = ae$.

Como la elipse tiene dos focos, también tendrá dos directrices. Las ecuaciones de las directrices $D'D'$ y DD son, respectivamente,

$$x + \frac{a}{e} = 0 \quad \text{y} \quad x - \frac{a}{e} = 0.$$

Si los focos estuvieran sobre el eje y, las ecuaciones de las directrices serían

$$y + \frac{a}{e} = 0 \quad \text{y} \quad y - \frac{a}{e} = 0.$$

Se denomina *latus rectum* de la elipse a la cuerda perpendicular al eje mayor por uno de los focos. Su longitud es $\dfrac{2b^2}{a}$.

Los puntos en los cuales la elipse corta al eje mayor se llaman *vértices*.

Si el centro de la elipse es el punto (h, k) y el eje mayor tiene la dirección del eje x, la ecuación de la elipse es de la forma

$$\frac{(x - h)^2}{a^2} + \frac{(y - k)^2}{b^2} = 1,$$

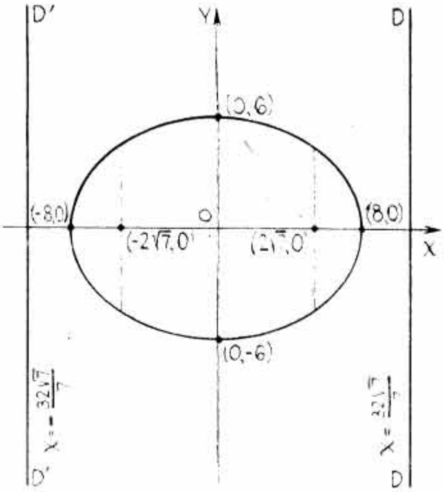
o bien, $\dfrac{(x - h)^2}{b^2} + \dfrac{(y - k)^2}{a^2} = 1$ si el eje mayor fuera paralelo al eje y. En cualquier caso, la forma general de la ecuación de la elipse es

$$Ax^2 + By^2 + Dx + Ey + F = 0$$

siempre que A y B sean del mismo signo.

PROBLEMAS RESUELTOS

1. Dada la elipse $9x^2 + 16y^2 = 576$, hallar el semieje mayor, el semieje menor, la excentricidad, las coordenadas de los focos, las ecuaciones de las directrices y la longitud del *latus rectum*.



Dividiendo por 576 se tiene $\dfrac{x^2}{64} + \dfrac{y^2}{36} = 1$. Luego $a = 8$ y $b = 6$.

$$e = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} = \frac{2\sqrt{7}}{4}, \qquad c = \sqrt{a^2 - b^2} = 2\sqrt{7}.$$

Coordenadas de los focos: $(2\sqrt{7}, 0)$ y $(-2\sqrt{7}, 0)$.

Las ecuaciones de las directrices son

$$x = \pm \frac{a}{e} \quad \text{o} \quad x = \pm \frac{32\sqrt{7}}{7}.$$

La longitud del *latus rectum* de la elipse es $2b^2/a = 72/8 = 9$.

2. Hallar la ecuación de la elipse de centro el origen, foco en el punto (0, 3) y semieje mayor igual a 5.

Datos: $c = 3$ y $a = 5$. Por consiguiente, $b = \sqrt{a^2 - c^2} = \sqrt{25 - 9} = 4$.

Aplicando la fórmula $\dfrac{x^2}{b^2} + \dfrac{y^2}{a^2} = 1$, se obtiene la ecuación $\dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{25} = 1$.

3. Hallar la ecuación de la elipse de centro el origen, eje mayor sobre el eje x y que pase por los puntos (4, 3) y (6, 2).

La fórmula a aplicar es $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$. Sustituyendo x e y por las coordenadas de los puntos dados se obtiene, $\dfrac{16}{a^2} + \dfrac{9}{b^2} = 1$ y $\dfrac{36}{a^2} + \dfrac{4}{b^2} = 1$. Resolviendo este sistema de ecuaciones, $a^2 = 52$, $b^2 = 13$.

Luego la ecuación pedida es $\dfrac{x^2}{52} + \dfrac{y^2}{13} = 1$, o bien, $x^2 + 4y^2 = 52$.

4. Hallar la ecuación del lugar geométrico de los puntos cuya distancia al punto (4, 0) es igual a la mitad de la correspondiente a la recta $x - 16 = 0$.

Del enunciado del problema se deduce,

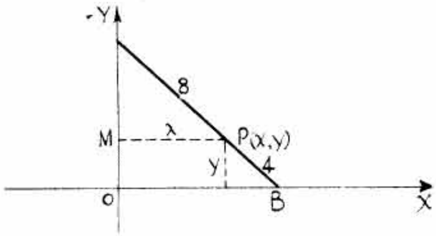
$$\sqrt{(x-4)^2 + (y-0)^2} = \tfrac{1}{2}(x - 16), \text{ o sea, } x^2 - 8x + 16 + y^2 = \frac{x^2 - 32x + 256}{4}.$$

Simplificando, se obtiene la ecuación $3x^2 + 4y^2 = 192$, de la elipse.

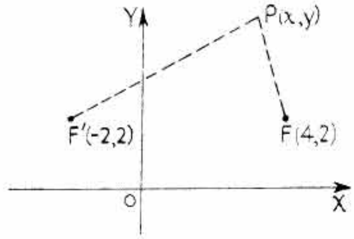
5. Se considera un segmento AB de 12 unidades de longitud y un punto $P(x, y)$ situado sobre él a 8 unidades de A. Hallar el lugar geométrico de P cuando el segmento se desplace de forma que los puntos A y B se apoyen constantemente sobre los ejes de coordenadas y y x respectivamente.

Por triángulos semejantes, $\dfrac{MA}{AP} = \dfrac{y}{PB}$, o sea, $\dfrac{\sqrt{64 - x^2}}{8} = \dfrac{y}{4}$.

Luego $64 - x^2 = 4y^2$, o bien, $x^2 + 4y^2 = 64$. El lugar es una elipse con su centro en el origen y de eje mayor sobre el eje x.



Problema 5



Problema 6

6. Hallar la ecuación del lugar geométrico de los puntos $P(x, y)$ cuya suma de distancias a los puntos fijos (4, 2) y (—2, 2) sea igual a 8.

$F'P + PF = 8$, o sea, $\sqrt{(x+2)^2 + (y-2)^2} + \sqrt{(x-4)^2 + (y-2)^2} = 8$.

Ordenando términos, $\sqrt{(x+2)^2 + (y-2)^2} = 8 - \sqrt{(x-4)^2 + (y-2)^2}$.

Elevando al cuadrado y reduciendo términos, $3x - 19 = -4\sqrt{(x-4)^2 + (y-2)^2}$.

Elevando de nuevo al cuadrado y reduciendo términos resulta la ecuación $7x^2 + 16y^2 - 14x - 64y - 41 = 0$, que es una elipse.

7. Dada la elipse de ecuación $4x^2 + 9y^2 - 48x + 72y + 144 = 0$, hallar su centro, semiejes, vértices y focos.

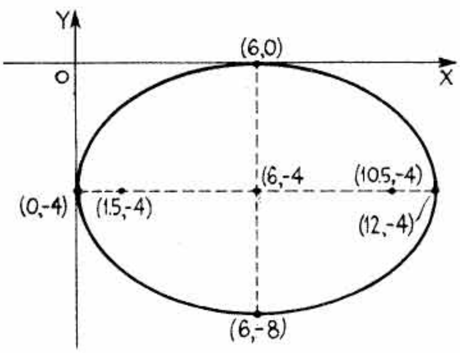
Esta ecuación se puede poner en la forma $\dfrac{(x-h)^2}{a^2} + \dfrac{(y-k)^2}{b^2} = 1$, de la manera siguiente:

$$4(x^2 - 12x + 36) + 9(y^2 + 8y + 16) = 144,$$

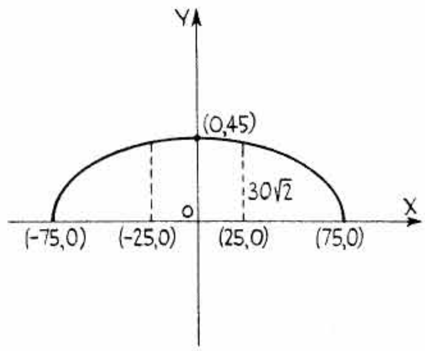
$$4(x-6)^2 + 9(y+4)^2 = 144,$$

$$\frac{(x-6)^2}{36} + \frac{(y+4)^2}{16} = 1.$$

Por tanto, el centro de la elipse es el punto de coordenadas $(6, -4)$; $a = 6$, $b = 4$; los vértices son los puntos $(0, -4)$, $(12, -4)$, y los focos $(6 + 2\sqrt{5}, -4)$, $(6 - 2\sqrt{5}, -4)$.



Problema 7



Problema 8

8. Un arco tiene forma de semielipse con una luz de 150 metros siendo su máxima altura de 45 metros. Hallar la longitud de dos soportes verticales situados cada uno a igual distancia del extremo del arco.

Supongamos el eje x en la base del arco y el origen en su punto medio. La ecuación del arco será, $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, siendo $a = 75$, $b = 45$.

Para hallar la altura de los soportes, hacemos $x = 25$ en la ecuación y despejamos el valor de y.

Es decir, $\dfrac{625}{5.625} + \dfrac{y^2}{2.025} = 1$, $y^2 = 8(225)$, e $y = 30\sqrt{2}$ metros.

9. La Tierra describe una trayectoria elíptica alrededor del Sol que se encuentra en uno de los focos. Sabiendo que el semieje mayor de la elipse vale $1{,}485 \times 10^8$ kilómetros y que la excentricidad es, aproximadamente, $1/62$, hallar la máxima y la mínima distancias de la Tierra al Sol.

Excentricidad $e = \dfrac{c}{a}$. Luego $\dfrac{1}{62} = \dfrac{c}{148.500.000}$, o sea, $c = 2.400.000$.

La máxima distancia es $a + c = 1{,}509 \times 10^8$ km.
La mínima distancia es $a + c = 1{,}461 \times 10^8$ km.

10. Hallar la ecuación de la elipse de centro (1, 2), uno de los focos (6, 2) y que pase por el punto (4, 6).

Aplicamos la ecuación $\dfrac{(x-1)^2}{a^2}+\dfrac{(y-2)^2}{b^2}=1$.

Como (4, 6) pertenece a la curva, $\dfrac{(4-1)^2}{a^2}+\dfrac{(6-2)^2}{b^2}=1$, o bien, $\dfrac{9}{a^2}+\dfrac{16}{b^2}=1$.

Como $c=5$, resulta $b^2=a^2-c^2=a^2-25$ y $\dfrac{9}{a^2}+\dfrac{16}{a^2-25}=1$.

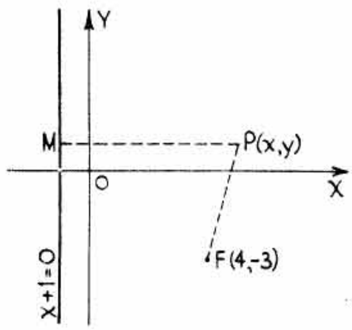
Resolviendo, $a^2=45$ y $b^2=20$. Sustituyendo, $\dfrac{(x-1)^2}{45}+\dfrac{(y-2)^2}{20}=1$.

11. Hallar la ecuación de la elipse de centro (—1, —1), uno de los vértices el punto (5, —1) y excentricidad $e=\dfrac{2}{3}$.

Como el centro es el punto (—1, —1) y el vértice (5, —1) se tiene, $a=6$, $e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{c}{6}=\dfrac{2}{3}$, de donde $c=4$. Por otra parte, $b^2=a^2-c^2=36-16=20$.

La ecuación pedida es $\dfrac{(x+1)^2}{36}+\dfrac{(y+1)^2}{20}=1$.

12. Hallar la ecuación de la elipse cuya directriz es la recta $x=-1$, uno de los focos el punto (4, —3) y excentricidad 2/3.



De la definición general de sección cónica, si $\dfrac{PF}{PM}=e$ y $e<1$ la curva es una elipse.

Por consiguiente, $\dfrac{\sqrt{(x-4)^2+(y+3)^2}}{x+1}=\dfrac{2}{3}$.

Elevando al cuadrado los dos miembros de esta ecuación y simplificando resulta,

$$5x^2+9y^2-80x+54y=-221.$$

Completando cuadrados, $5(x^2-16x+64)+9(y^2+6y+9)=-221+320+81$,

es decir, $5(x-8)^2+9(y+3)^2=180$,

o bien, $\dfrac{(x-8)^2}{36}+\dfrac{(y+3)^2}{20}=1$.

13. Hallar el lugar geométrico de los puntos $P(x, y)$ cuyo producto de las pendientes de las rectas que unen $P(x, y)$ con los puntos fijos (3, —2) y (—2, 1) es igual a —6.

$\left(\dfrac{y+2}{x-3}\right)\left(\dfrac{y-1}{x+2}\right)=-6$, o bien, $6x^2+y^2+y-6x=38$, una elipse.

14. Hallar la ecuación de la elipse de focos $(0, \pm4)$ y que pase por el punto $\left(\dfrac{12}{5}, 3\right)$.

Sustituyendo $x=\dfrac{12}{5}$, $y=3$ en $\dfrac{x^2}{b^2}+\dfrac{y^2}{a^2}=1$ se obtiene $\dfrac{144}{25b^2}+\dfrac{9}{a^2}=1$.

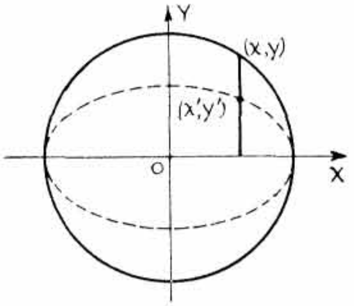
Como los focos son $(0, \pm4)$, resulta $c=4$ y $a^2-b^2=4^2=16$.

Resolviendo el sistema de ecuaciones, $a^2=25$, $b^2=9$. Luego, $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{25}=1$.

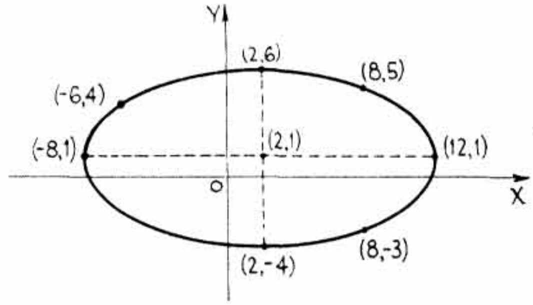
15. Hallar el lugar geométrico de los puntos que dividen a las ordenadas de los puntos de la circunferencia $x^2 + y^2 = 25$ en la relación $\frac{3}{5}$.

Sea $y' = \frac{3}{5}y$, o bien, $y = \frac{5}{3}y'$, y $x = x'$. Entonces, $x'^2 + \frac{25}{9}y'^2 = 25$.

Suprimiendo las primas y simplificando se llega a la ecuación $9x^2 + 25y^2 = 225$, que es una elipse.



Problema 15



Problema 16

16. Hallar la ecuación de la elipse que pasa por los puntos (—6, 4), (—8, 1), (2, —4) y (8, —3) y cuyos ejes son paralelos a los de coordenadas.

En la ecuación $x^2 + By^2 + Cx + Dy + E = 0$, sustituyendo x e y por las coordenadas de los cuatro puntos dados,

$$\begin{aligned} 16B - 6C + 4D + E &= -36, \\ B - 8C + D + E &= -64, \\ 16B + 2C - 4D + E &= -4, \\ 9B + 8C - 3D + E &= -64. \end{aligned}$$

Resolviendo el sistema, $B = 4$, $C = -4$, $D = -8$, y $E = -92$.

La ecuación pedida es $x^2 + 4y^2 - 4x - 8y - 92 = 0$, o bien, $\frac{(x-2)^2}{100} + \frac{(y-1)^2}{25} = 1$.

17. Hallar la ecuación del lugar geométrico del centro de una circunferencia tangente a $x^2 + y^2 = 1$ y $x^2 + y^2 - 4x - 21 = 0$.

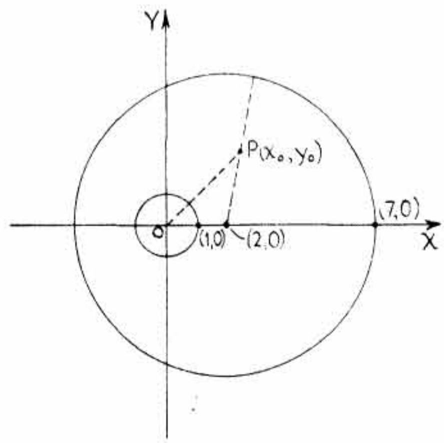
Sean (x_0, y_0) las coordenadas del centro. Las circunferencias dadas tienen de radios 1 y 5 respectivamente.

a) $5 - \sqrt{(x_0 - 2)^2 + (y_0 - 0)^2} = \sqrt{x_0^2 + y_0^2} - 1$.

Elevando al cuadrado, simplificando y suprimiendo las primas se llega a la ecuación $8x^2 + 9y^2 - 16x - 64 = 0$, que es una elipse. Poniendo esta ecuación en la forma

$$\frac{(x-1)^2}{9} + \frac{(y-0)^2}{8} = 1,$$

se deduce que el centro de la elipse corresponde al punto (1, 0).



b) $\sqrt{x_0^2 + y_0^2} + 1 = 5 - \sqrt{(x_0 - 2)^2 + y_0^2}$. Elevando al cuadrado, simplificando y suprimiendo las primas se llega a la ecuación $3x^2 + 4y^2 - 6x - 9 = 0$, o bien, $\frac{(x-1)^2}{4} + \frac{(y-0)^2}{3} = 1$.

El centro de esta elipse es el punto (1, 0).

18. En una elipse, los radios focales son las rectas que unen los focos con un punto cualquiera de ella. Hallar las ecuaciones de los radios focales correspondientes al punto (2, 3) de la elipse $3x^2 + 4y^2 = 48$.

Escribiendo esta ecuación en la forma $\dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{12} = 1$ se tiene, $c = \pm\sqrt{16 - 12} = \pm 2$.

Los focos son los puntos $(\pm 2, 0)$. La ecuación del radio focal del punto (2, 0) al (2, 3) es $x - 2 = 0$ y la del (—2, 0) al (2, 3) es $y - 0 = \dfrac{3-0}{2+2}(x + 2)$, o bien, $3x - 4y + 6 = 0$.

PROBLEMAS PROPUESTOS

1. En cada una de las elipses siguientes hallar *a*) la longitud del semieje mayor, *b*) la longitud del semieje menor, *c*) las coordenadas de los focos, *d*) la excentricidad.

(1) $\dfrac{x^2}{169} + \dfrac{y^2}{144} = 1$. *Sol.* *a*) 13, *b*) 12, *c*) $(\pm 5, 0)$, *d*) $\dfrac{5}{13}$.

(2) $\dfrac{x^2}{8} + \dfrac{y^2}{12} = 1$. *Sol.* *a*) $2\sqrt{3}$, *b*) $2\sqrt{2}$, *c*) $(0, \pm 2)$, *d*) $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

(3) $225x^2 + 289y^2 = 65.025$. *Sol.* *a*) 17, *b*) 15, *c*) $(\pm 8, 0)$, *d*) $\dfrac{8}{17}$.

2. Hallar las ecuaciones de las elipses siguientes de forma que satisfagan las condiciones que se indican.

(1) Focos $(\pm 4, 0)$, vértices $(\pm 5, 0)$. *Sol.* $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{9} = 1$.

(2) Focos $(0, \pm 8)$, vértices $(0, \pm 17)$. *Sol.* $\dfrac{x^2}{225} + \dfrac{y^2}{289} = 1$.

(3) Longitud del *latus rectum* = 5, vértices $(\pm 10, 0)$. *Sol.* $\dfrac{x^2}{100} + \dfrac{y^2}{25} = 1$.

(4) Focos $(0, \pm 6)$, semieje menor = 8. *Sol.* $\dfrac{x^2}{64} + \dfrac{y^2}{100} = 1$.

(5) Focos $(\pm 5, 0)$, excentricidad $= \dfrac{5}{8}$. *Sol.* $\dfrac{x^2}{64} + \dfrac{y^2}{39} = 1$.

3. Hallar la ecuación de la elipse de centro el origen, focos en el eje x, y que pase por los puntos $(-3, 2\sqrt{3})$ y $(4, 4\sqrt{5}/3)$. *Sol.* $4x^2 + 9y^2 = 144$.

4. Hallar la ecuación de la elipse de centro el origen, semieje mayor de 4 unidades de longitud sobre el eje y, y la longitud del *latus rectum* igual a 9/2. *Sol.* $16x^2 + 9y^2 = 144$.

5. Hallar el lugar geométrico de los puntos $P(x, y)$ cuya suma de distancias a los puntos fijos (3, 1) y (—5, 1) sea igual a 10. ¿Qué curva representa dicho lugar?
Sol. $9x^2 + 25y^2 + 18x - 50y - 191 = 0$, una elipse.

6. Hallar el lugar geométrico de los puntos $P(x, y)$ cuya suma de distancias a los puntos fijos (2, —3) y (2, 7) sea igual a 12. *Sol.* $36x^2 + 11y^2 - 144x - 44y - 208 = 0$.

7. Hallar el lugar geométrico de los puntos cuya distancia al punto fijo (3, 2) sea la mitad de la correspondiente a la recta $x + 2 = 0$. ¿Qué curva representa dicho lugar?
Sol. $3x^2 + 4y^2 - 28x - 16y + 48 = 0$, una elipse.

8. Dada la elipse de ecuación $9x^2 + 16y^2 - 36x + 96y + 36 = 0$, hallar *a*) las coordenadas del centro, *b*) el semieje mayor, *c*) el semieje menor, *d*) los focos y *e*) la longitud del *latus rectum*.
Sol. *a*) $(2, -3)$, *b*) 4, *c*) 3, *d*) $(2 \pm \sqrt{7}, -3)$, *e*) 4,5.

9. Hallar la ecuación de la elipse de centro $(4, -1)$, uno de los focos en $(1, -1)$ y que pase por el punto $(8, 0)$. *Sol.* $\dfrac{(x-4)^2}{18} + \dfrac{(y+1)^2}{9} = 1$, o bien, $x^2 + 2y^2 - 8x + 4y = 0$.

10. Hallar la ecuación de la elipse de centro $(3, 1)$, uno de los vértices en $(3, -2)$ y excentricidad $e = 1/3$.
Sol. $\dfrac{(x-3)^2}{8} + \dfrac{(y-1)^2}{9} = 1$, o bien, $9x^2 + 8y^2 - 54x - 16y + 17 = 0$.

11. Hallar la ecuación de la elipse uno de cuyos focos es el punto $(-1, -1)$, directriz $x = 0$, y excentricidad $e = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$. *Sol.* $x^2 + 2y^2 + 4x + 4y + 4 = 0$.

12. Un punto $P(x, y)$ se mueve de forma que el producto de las pendientes de las dos rectas que unen P con los dos puntos fijos $(-2, 1)$ y $(6, 5)$ es constante e igual a -4. Demostrar que dicho lugar es una elipse y hallar su centro. *Sol.* $4x^2 + y^2 - 16x - 6y - 43 = 0$. Centro $(2, 3)$.

13. Un segmento AB, de 18 unidades de longitud, se mueve de forma que A está siempre sobre el eje y y B sobre el eje x. Hallar el lugar geométrico de los puntos $P(x, y)$ sabiendo que P pertenece al segmento AB y está situado a 6 unidades de B. *Sol.* $x^2 + 4y^2 = 144$, una elipse.

14. Un arco de 80 metros de luz tiene forma semielíptica. Sabiendo que su altura es de 30 metros, hallar la altura del arco en un punto situado a 15 metros del centro. *Sol.* $15\sqrt{55}/4$ metros.

15. La órbita de la Tierra es una elipse en uno de cuyos focos está el Sol. Sabiendo que el semieje mayor de la elipse es 148,5 millones de kilómetros y que la excentricidad vale 0,017, hallar la máxima y la mínima distancias de la Tierra al Sol. *Sol.* (152, 146) millones de kilómetros.

16. Hallar la ecuación de la elipse de focos $(\pm 8, 0)$ y que pasa por el punto $(8, 18/5)$.
Sol. $\dfrac{x^2}{100} + \dfrac{y^2}{36} = 1$.

17. Hallar el lugar geométrico de los puntos que dividen a las ordenadas de los puntos de la circunferencia $x^2 + y^2 = 16$ en la relación $\frac{1}{2}$. *Sol.* $x^2 + 4y^2 = 16$.

18. Hallar las ecuaciones de los radios focales correspondientes al punto $(1, -1)$ de la elipse

$$x^2 + 5y^2 - 2x + 20y + 16 = 0.$$

Sol. $x - 2y - 3 = 0$, $x + 2y + 1 = 0$.

19. Hallar la ecuación de la elipse que pasa por los puntos $(0, 1)$, $(1, -1)$, $(2, 2)$, $(4, 0)$ y cuyos ejes son paralelos a los de coordenadas. *Sol.* $13x^2 + 23y^2 - 51x - 19y - 4 = 0$.

20. Hallar el lugar geométrico del centro de la circunferencia tangente a

$$x^2 + y^2 = 4 \quad \text{y} \quad x^2 + y^2 - 6x - 27 = 0.$$

Sol. $220x^2 + 256y^2 - 660x - 3.025 = 0$ y $28x^2 + 64y^2 - 84x - 49 = 0$.