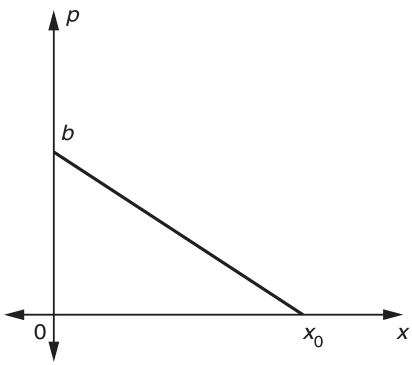
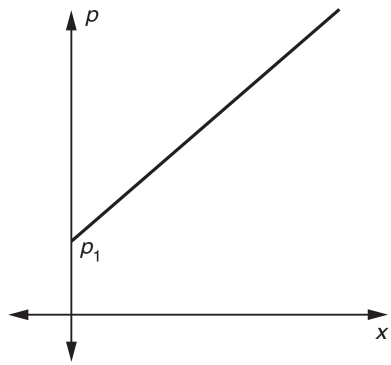
drán adquirirlo, mientras que si el precio por unidad disminuye (es decir, el artículo se abarata) la demanda se incrementará. En otras palabras, la pendiente m de la relación de demanda de la ecuación (1) es negativa. De modo que la gráfica de la ecuación tiene una inclinación que baja hacia la derecha, como se aprecia en la parte *a*) de la figura 21. Puesto que el precio p por unidad y la cantidad x demandada no son números negativos, la gráfica de la ecuación (4) sólo debe dibujarse en el primer cuadrante.

La cantidad de un artículo determinado que sus proveedores están dispuestos a ofrecer depende del precio al cual puedan venderlo. Una relación que especifique la cantidad de cualquier artículo que los fabricantes (o vendedores) puedan poner en el mercado a varios precios se denomina **ley de la oferta**. La gráfica de una ecuación de la oferta (o ley de la oferta) se conoce como **curva de la oferta**.



Curva de demanda lineal
a)



Curva de oferta lineal
b)

FIGURA 21

En general, los proveedores inundarán el mercado con una gran cantidad de artículos, si pueden ponerle un precio alto, y con una cantidad más pequeña de artículos si el precio obtenido es más bajo. En otras palabras, la oferta aumenta al subir el precio. Una curva de oferta lineal típica aparece en la parte *b*) de la figura 21. El precio p_1 corresponde a un precio bajo del cual los proveedores no ofrecerán el artículo.

EJEMPLO 4 ***(Demanda)*** Un comerciante puede vender 20 rasuradoras eléctricas al día al precio de \$25 cada una, pero puede vender 30 si les fija un precio de \$20 a cada rasuradora eléctrica. Determine la ecuación de demanda, suponiendo que es lineal.

Solución Considerando la cantidad x demandada como la abscisa (o coordenada x) y el precio p por unidad como la ordenada (o coordenada y) los dos puntos sobre la curva de demanda tienen coordenadas.

$$x = 20, p = 25 \quad \text{y} \quad x = 30, p = 20$$

De modo que los puntos son (20, 25) y (30, 20). Dado que la ecuación de demanda es lineal, está dada por la ecuación de una línea recta que pasa por los puntos

(20, 25) y (30, 20). La pendiente de la línea que une estos puntos es

$$m = \frac{20 - 25}{30 - 20} = -\frac{5}{10} = -0.5$$

Por la fórmula punto-pendiente, la ecuación de la línea que pasa por (20, 25) con pendiente $m = -0.5$ es

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

Dado que $y = p$, tenemos que

$$p - 25 = -0.5x(x - 20)$$

$$p = -0.5x + 35$$

que es la ecuación de demanda requerida. (Véase la figura 22). ☛ **15**

☛ **15.** Cuando el precio por unidad es \$10, la oferta será de 80 unidades diarias, mientras que será de 90 unidades a un precio unitario de \$10.50. Determine la ecuación de oferta, suponiendo que es lineal. Dibuje la curva de oferta

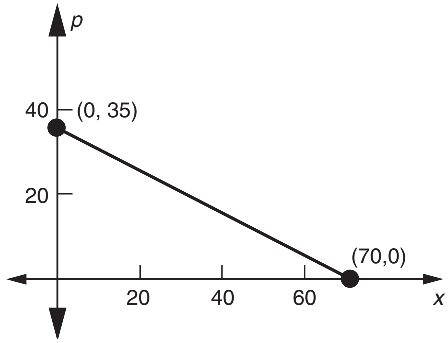
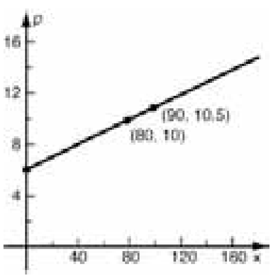


FIGURA 22

Respuesta $p = \frac{1}{20}x + 6$



Tasa de sustitución

Con frecuencia, los planeadores tienen que decidir entre diferentes maneras de asignar recursos limitados. Por ejemplo, un fabricante tiene que asignar la capacidad de la planta entre dos productos diferentes. Si la relación entre las cantidades de los dos productos es lineal, la pendiente de su gráfica puede interpretarse como la tasa de sustitución de un producto por otro. Considere el ejemplo siguiente.

EJEMPLO 5 (***Decisión de tránsito***) El gobierno de una ciudad tiene un presupuesto de \$200 millones de capital para gasto sobre transporte, e intenta utilizarlo para construir metros subterráneos o carreteras. Cuesta \$2.5 millones por milla construir carreteras y \$4 millones por milla para metros subterráneos. Encuentre la relación entre el número de millas de carretera y de subterráneo que puede construirse para utilizar por completo el presupuesto disponible. Interprete la pendiente de la relación lineal que se obtiene.

Solución Suponga que se construyen x millas de carretera y y millas de subterráneo. El costo de construir x millas de carretera a \$2.5 millones por milla es $2.5x$ millones de dólares y el costo de construir y millas de subterráneo a \$4 millones por milla es $4y$ millones de dólares. Como el costo total tiene que ser igual al presupuesto asignado para el propósito,

$$2.5x + 4y = 200$$

Esta ecuación proporciona la relación requerida entre los números de millas que pueden construirse dentro del presupuesto.

Al resolver la ecuación dada para y, tenemos

$$y = -\tfrac{5}{8}x + 50$$

La pendiente de esta recta es $-\frac{5}{8}$, la cual expresa el hecho de que la construcción de cada milla adicional de carretera será a un costo de $\frac{5}{8}$ de milla de construcción de subterráneo. Al resolver la ecuación original para x en términos de y, obtenemos

$$x = -\tfrac{8}{5}y + 80$$

Así, cada milla adicional de construcción de subterráneo sustituye $\frac{8}{5}$ millas de construcción de carretera.

EJERCICIOS 4-3

1. *(Modelo de costo lineal)* El costo variable de fabricar una mesa es de \$7 y los costos fijos son de \$150 al día. Determine el costo total y_c de fabricar x mesas al día. ¿Cuál es el costo de fabricar 100 mesas al día?

2. *(Modelo de costo lineal)* El costo de fabricar 100 cámaras a la semana es de \$700 y el de 120 cámaras a la semana es de \$800.

a) Determine la ecuación de costos, suponiendo que es lineal.

b) ¿Cuáles son los costos fijos y variables por unidad?

3. *(Modelo de costo lineal)* A una compañía le cuesta \$75 producir 10 unidades de cierto artículo al día y \$120 producir 25 unidades del mismo artículo al día.

a) Determine la ecuación de costos, suponiendo que sea lineal.

b) ¿Cuál es el costo de producir 20 artículos al día?

c) ¿Cuál es el costo variable y el costo fijo por artículo?

4. *(Modelo de costo lineal)* La compañía de mudanzas Ramírez cobra \$70 por transportar cierta máquina 15 millas y \$100 por transportar la misma máquina 25 millas.

a) Determine la relación entre la tarifa total y la distancia recorrida, suponiendo que es lineal.

b) ¿Cuál es la tarifa mínima por transportar esta máquina?

c) ¿Cuál es la cuota por cada milla que la máquina es transportada?

5. *(Modelo de costo lineal)* Los costos fijos por fabricar cierto artículo son de \$300 a la semana y los costos totales por fabricar 20 unidades a la semana son de \$410. Determine la relación entre el costo total y el número de unidades producidas, suponiendo que es lineal. ¿Cuál será el costo de fabricar 30 unidades a la semana?

6. *(Modelo de costo lineal)* Un hotel alquila un cuarto a una persona a una tarifa de \$25 por la primera noche y de \$20 por cada noche siguiente. Exprese el costo y_c de la cuenta en términos de x, el número de noches que la persona se hospeda en el hotel.

7. *(Modelo de costo lineal)* Una compañía especializada ofrece banquetes a grupos de personas al costo de \$10 por persona, más un cargo extra de \$150. Encuentre el costo y_c que fijaría la compañía por x personas.

8. *(Modelo de costo lineal)* El costo de un boleto de autobús en Yucatán depende directamente de la distancia viajada. Un recorrido de 2 millas cuesta 40¢, mientras que uno de 6 millas tiene un costo de 60¢. Determine el costo de un boleto por un recorrido de x millas.

9. *(Relación de la demanda)* Un fabricante de detergente encuentra que las ventas son de 10,000 paquetes a la semana cuando el precio es de \$1.20 por paquete, pero que las ventas se incrementan a 12,000 cuando el precio se reduce a \$1.10 por paquete. Determine la relación de demanda, suponiendo que es lineal.

10. *(Relación de la demanda)* Un fabricante de televisores advierte que a un precio de \$500 por televisor, las ventas ascienden a 2000 televisores al mes. Sin embargo, a \$450 por televisor, las ventas son de 2400 unidades. Determine la ecuación de demanda, suponiendo que es lineal.

11. *(Ecuación de la oferta)* A un precio de \$2.50 por unidad, una empresa ofrecerá 8000 camisetas al mes; a \$4 cada unidad, la misma empresa producirá 14,000 camisetas al mes. Determine la ecuación de la oferta, suponiendo que es lineal.

12. *(Relación de la demanda)* Un fabricante de herramientas puede vender 3000 martillos al mes a \$2 cada uno, mientras que sólo pueden venderse 2000 martillos a \$2.75 cada uno. Determine la ley de demanda, suponiendo que es lineal.

13. *(Ecuación de oferta)* A un precio de \$10 por unidad, una compañía proveería 1200 unidades de su producto, y a \$15 por unidad, 4200 unidades. Determine la relación de la oferta, suponiendo que sea lineal.

14. *(Renta de apartamentos)* Bienes Raíces Georgia posee un complejo habitacional que tiene 50 apartamentos. A una renta mensual de \$400, todos los apartamentos son rentados, mientras que si la renta se incrementa a \$460 mensuales, sólo pueden rentarse 47.

a) Suponiendo una relación lineal entre la renta mensual p y el número de apartamentos x que pueden rentarse, encuentre esta relación.

b) ¿Cuántos apartamentos se rentarán, si la renta mensual aumenta a \$500?

c) ¿Cuántos apartamentos se rentarán, si la renta disminuye a \$380 mensuales?

15. *(Depreciación)* Juan compró un automóvil nuevo por \$10,000. ¿Cuál es el valor V del automóvil después de t años, suponiendo que se deprecia linealmente cada año a una tasa del 12% de su costo original? ¿Cuál es el valor del automóvil después de 5 años?

16. *(Depreciación)* Una empresa compró maquinaria nueva por \$15,000. Si se deprecia linealmente en \$750 al año y si tiene un valor de desecho de \$2250, ¿por cuánto tiempo estará la maquinaria en uso? ¿Cuál será el valor V de la maquinaria después de t años de uso y después de 6 años de uso?

17. *(Depreciación)* La señora Olivares compró un televisor nuevo por \$800 que se deprecia linealmente cada año un 15% de su costo original. ¿Cuál es el valor del televisor después de t años y después de 6 años de uso?

18. *(Depreciación)* Sea P el precio de adquisición, S el valor de desecho y N la vida útil en años de una pieza de un equipo. Demuestre que, según la depreciación lineal, el valor del equipo después de t años está dado por $V = P - (P - S)(t/N)$.

19. *(Asignación de máquinas)* Una compañía fabrica dos tipos de cierto producto. Cada unidad del primer tipo requiere de 2 horas de máquina y cada unidad del segundo tipo requiere de 5 horas de máquina. Hay disponibles 280 horas de máquina a la semana.

a) Si a la semana se fabrican x unidades del primer tipo y y unidades del segundo, encuentre la relación entre x y y si se utilizan todas las horas de máquina.

b) ¿Cuál es la pendiente de la ecuación en la parte *a*)? ¿Qué representa?

c) ¿Cuántas unidades del primer tipo pueden fabricarse si 40 unidades del segundo tipo se fabrican en una semana particular?

20. *(Asignación de trabajo)* La compañía Boss-Toss manufactura dos productos, X y Y. Cada unidad de X requiere 3 horas de mano de obra y cada unidad de Y requiere 4 horas de mano de obra. Hay 120 horas de mano de obra disponibles cada día.

a) Si x unidades de X y y unidades de Y son fabricadas diariamente y todas las horas de mano de obra se utilizan, encuentre una relación entre x y y.

b) Dé la interpretación física de la pendiente de la relación lineal obtenida.

c) ¿Cuántas unidades de X pueden fabricarse en un día si ese mismo día se hicieron 15 unidades de Y?

d) ¿Cuántas unidades de Y pueden fabricarse en un día si ese mismo día se manufacturaron 16 unidades de X?

21. *(Reducciones de inventarios)* La tienda "El Mayorista" tiene 650 unidades del artículo X en bodega y su promedio de ventas por día de este artículo es de 25 unidades.

a) Si y representa el inventario (de artículos X en bodega) al tiempo t (medido en días), determine la relación lineal entre y y t. (Use $t = 1$ para representar el término del primer día, etcétera.)

b) ¿Cuánto llevará vaciar la bodega?

c) ¿En cuántos días de ventas deberán hacer un nuevo pedido si han decidido hacerlo cuando el nivel de la bodega sea de 125 unidades?

22. *(Ciencias políticas)* En una elección para la Cámara de Representantes de Estados Unidos, se estima que si los Demócratas ganan el 40% del voto popular, obtendrían 30% de los escaños, y que por cada punto porcentual en que aumenten sus votos, su participación en la Cámara se incrementa en 2.5%. Suponiendo que hay una relación lineal $y = mx + c$ entre x, el porcentaje de votos, y y, el porcentaje de escaños, calcúlese m y c. ¿Qué porcentaje de curules obtendrán los Demócratas si ganaran 55% del voto popular?

23. *(Zoología)* El peso promedio W de la cornamenta de un ciervo está relacionada con la edad del ciervo aproximadamente por la ecuación $W = mA + c$. Para ciertas especies se ha encontrado que cuando $A = 30$ meses, $W = 0.15$ kilogramos; mientras que cuando $A = 54$ meses, $W = 0.36$ kilogramos; Encuentre m y c y calcule la edad en la cual W alcanza 0.5 kilogramos.

24. *(Agricultura)* En los últimos 40 años el rendimiento promedio y (en bushels por acre) de maíz en Estados Unidos se ha incrementado con el tiempo t aproximadamente mediante la ecuación $y = mt + c$. En 1950 el rendimiento promedio era de 38 bushels por acre, mientras que en 1965 fue de 73. Calcule m y c. (Tome $t = 0$ en 1950.) Estime cuál será el rendimiento promedio en 1990 suponiendo que la misma ecuación sigue siendo válida.

25. *(Planeación dietética)* En un hospital un paciente que está a dieta de líquidos tiene que escoger jugo de ciruela o jugo de naranja para satisfacer su requerimiento de tiamina que es de 1 miligramo diario. Una onza de jugo de ciruela contiene 0.05 miligramos de tiamina y 1 onza de jugo de naranja contiene 0.08 miligramos de tiamina. Si consume x onzas de jugo de ciruela y y onzas de jugo de naranja diariamente. ¿Cuál es la relación entre x y y que satisface exactamente el requerimiento de tiamina?

26. *(Planeación dietética)* Un individuo que está bajo una dieta estricta planea desayunar cereal, leche y un huevo cocido. Después del huevo, su dieta le permite 300 calorías para esa comida. Una onza de leche contiene 20 calorías y 1 onza (alrededor de una taza llena) de cereal (más azúcar) contiene 160 calorías. ¿Cuál es la relación entre el número de onzas de leche y el de cereal que puede consumir?

■ 4-4 SISTEMAS DE ECUACIONES

Una gran cantidad de problemas en negocios y economía desembocan en los denominados *sistemas de ecuaciones lineales*. Por ejemplo, consideremos la siguiente situación.

El propietario de una tienda de televisores desea expandir su negocio comprando y poniendo a la venta dos nuevos modelos de televisores que acaban de salir al mercado. Cada televisor del primer tipo cuesta \$300 y cada televisor del segundo tipo \$400. Cada televisor del primer tipo ocupa un espacio de 4 pies cuadrados, mientras que cada uno del segundo tipo ocupa 5 pies cuadrados. Si el propietario sólo tiene disponibles \$2000 para su expansión y 26 pies cuadrados de espacio, ¿cuántos modelos de cada tipo deberá comprar y poner a la venta haciendo uso completo del capital disponible y del espacio?

Supóngase que el propietario compra x televisores del primer modelo y y del segundo. Entonces, le cuesta \$300x comprar el primer modelo y \$400y comprar el segundo tipo de televisores. Dado que la cantidad total que ha de gastar es de \$2000, es necesario que

$$300x + 400y = 2000 \tag{i}$$

Asimismo, la cantidad de espacio ocupada por los dos tipos de televisores es de $4x$ pies cuadrados y $5y$ pies cuadrados, respectivamente. El espacio total disponible para los dos modelos es de 26 pies cuadrados. Por tanto

$$4x + 5y = 26 \tag{ii}$$

Para encontrar el número de televisores de cada modelo que deberá comprar y poner a la venta, debemos resolver las ecuaciones (i) y (ii) para x y y. Es decir, debemos encontrar los valores de x y y que satisfagan a la vez las ecuaciones (i) y (ii). Obsérvese que cada una de ellas es una ecuación lineal en x y y.

DEFINICIÓN Un **sistema de ecuaciones lineales** con dos variables x y y consta de dos ecuaciones del tipo

$$a_1x + b_1y = c_1 \tag{1}$$

$$a_2x + b_2y = c_2 \tag{2}$$

de donde a_1, b_1, c_1, a_2, b_2 y c_2 son seis constantes. La **solución** del sistema definido por las ecuaciones (1) y (2) es el conjunto de los valores de x y y que satisfacen ambas ecuaciones.

Las ecuaciones (i) y (ii) forman uno de tales sistemas de ecuaciones lineales. Si identificamos la ecuación (i) con la ecuación (1) y la ecuación (ii) con la ecuación (2), las seis constantes tienen los valores $a_1 = 300$, $b_1 = 400$, $c_1 = 2000$, $a_2 = 4$, $b_2 = 5$ y $c_2 = 26$.

Nuestro principal interés en esta sección es resolver sistemas de ecuaciones lineales en forma algebraica. La solución por el uso de métodos algebraicos requiere la eliminación de una de las variables, x o y, de las dos ecuaciones; esto nos permite determinar el valor de la otra variable. La eliminación de una de las variables puede lograrse por sustitución o sumando un múltiplo apropiado de una ecuación a la otra. Los dos procedimientos se ilustran en el ejemplo 1.

EJEMPLO 1 Resuelva las dos ecuaciones que resultan del problema formulado al inicio de esta sección.

$$300x + 400y = 2000 \tag{i}$$

$$4x + 5y = 26 \tag{ii}$$

Solución ***(Método de sustitución)*** En este caso, despejamos x o y (lo que sea más sencillo) de una de las ecuaciones y sustituimos el valor de esta variable en la otra ecuación. De la ecuación (ii) (despejando x), tenemos

$$4x = 26 - 5y$$

$$x = \frac{26 - 5y}{4} \tag{iii}$$

Sustituimos este valor de x en la ecuación (i) y despejamos y.

$$300\left(\frac{26 - 5y}{4}\right) + 400y = 2000$$

$$75(26 - 5y) + 400y = 2000$$

$$1950 - 375y + 400y = 2000$$

$$25y = 200 - 1950 = 50$$

$$y = 2$$

Sustituyendo $y = 2$ en la ecuación (iii) tenemos que

$$x = \tfrac{1}{4}(26 - 10) = 4$$

☛ **16.** Resuelva el sistema siguiente usando la primer ecuación para sustituir y en la segunda:

$3x - y = 7;\ 2x + 4y = 14$

Respuesta Sustituya $y = 3x - 7$ La solución es $x = 3$, $y = 2$

☛ **17.** Resuelva el sistema siguiente eliminando x por medio del método de suma:

$x + y = 3;\ 2x + 3y = 11$

Respuesta Multiplique la primera ecuación por -2, luego súmela a la segunda. La solución es $x = -2$, $y = 5$

En consecuencia, la solución del sistema de ecuaciones (i) y (ii) es $x = 4$ y $y = 2$. En otras palabras, el comerciante deberá comprar 4 televisores del primer tipo y 2 del segundo, si emplea todo el espacio disponible y utiliza todo su capital. ☛ **16**

Solución alternativa ***(Método de eliminación)***

$$300x + 400y = 2000 \qquad \text{(i)}$$

$$4x + 5y = 26 \qquad \text{(ii)}$$

De acuerdo con este método, hacemos que los coeficientes de x o y en las dos ecuaciones tengan exactamente la misma magnitud y signos opuestos; luego sumamos las dos ecuaciones para eliminar una de las variables. Obsérvese que si multiplicamos ambos lados de la ecuación (ii) por -80, hacemos que el coeficiente de y tenga la misma magnitud que el de la ecuación (i), pero con el signo opuesto. La ecuación se transforma en

$$-320x - 400y = -2080 \qquad \text{(iv)}$$

Recordemos que la ecuación (i) es

$$300x + 400y = 2000$$

Cuando sumamos estas dos ecuaciones; los términos en y se cancelan y obtenemos

$$(-320x - 400y) + (300x + 400y) = -2080 + 2000 \qquad \text{(v)}$$

o bien

$$-20x = -80$$

$$x = 4$$

Sustituyendo $x = 4$ en una de las ecuaciones [usamos la ecuación (ii)], tenemos que

$$16 + 5y = 26$$

$$5y = 26 - 16 = 10$$

$$y = 2$$

Así que, la solución es $x = 4$ y $y = 2$, la misma que se obtuvo por el primer método. ☛ **17**

Observación Las operaciones requeridas en estos dos métodos no alteran las soluciones. Por ejemplo, cualesquiera x y y que satisfagan la ecuación (ii) también satisfarán la ecuación (iv); cualesquiera x y y que satisfagan a la vez la ecuaciones (i) y (iv) también satisfarán la ecuación (v), etc. En consecuencia, los métodos producen valores de x y y que son soluciones de la pareja original de ecuaciones.

EJEMPLO 2 Resuelva el sistema siguiente:

$$\frac{x - y}{3} = \frac{y - 1}{4}$$

$$\frac{4x - 5y}{7} = x - 7$$

Solución La primera etapa consiste en eliminar las fracciones de las dos ecuaciones. Multiplicamos ambos lados de la primera ecuación por 12, el denominador común y simplificamos.

$$\begin{aligned} 4(x - y) &= 3(y - 1) \\ 4x - 4y &= 3y - 3 \\ 4x - 7y &= -3 \end{aligned}$$

Multiplicamos ambos lados de la segunda ecuación por 7 y simplificamos, obteniendo

$$\begin{aligned} 4x - 5y &= 7(x - 7) = 7x - 49 \\ -3x - 5y &= -49 \end{aligned}$$

Multiplicando la ecuación completa por -1, resulta

$$3x + 5y = 49$$

De manera que el sistema de ecuaciones es equivalente al sistema de ecuaciones lineales siguientes:

$$4x - 7y = -3 \tag{i}$$

$$3x + 5y = 49 \tag{ii}$$

Usamos el método de sustitución. Despejamos x en la ecuación (i).

$$4x = 7y - 3 \quad \text{o bien} \quad x = \tfrac{1}{4}(7y - 3) \tag{iii}$$

Sustituyendo este valor de x en la ecuación (ii), obtenemos

$$\tfrac{3}{4}(7y - 3) + 5y = 49$$

Multiplicamos ambos lados por 4 y despejamos y.

$$\begin{aligned} 3(7y - 3) + 20y &= 196 \\ 21y - 9 + 20y &= 196 \\ 41y &= 196 + 9 = 205 \\ y &= \frac{205}{41} = 5 \end{aligned}$$

Haciendo $y = 5$ en la ecuación (iii), resulta

$$x = \tfrac{1}{4}(35 - 3) = 8$$

En consecuencia la solución requerida es $x = 8$ y $y = 5$

Un sistema de ecuaciones lineales y su solución tienen una intepretación geométrica importante. Por ejemplo, consideremos el sistema siguiente.

$$x + y = 3 \tag{3}$$

$$3x - y = 1 \tag{4}$$

Usando alguno de los métodos de solución anteriores, fácilmente nos damos cuenta de que la solución es $x = 1$ y $y = 2$.

Cada una de las ecuaciones (3) y (4) es lineal en x y y, por lo que tiene como gráfica una línea recta en el plano xy. En el caso de la ecuación (3), determinamos el punto en que corta el eje x haciendo $y = 0$. Esto da $x = 3$, de modo que la línea pasa por el punto (3, 0). De manera similar, haciendo $x = 0$, encontramos que $y = 3$, por lo que la línea corta al eje y en el punto (0, 3). Estos dos puntos aparecen en la figura 23 y la gráfica de la ecuación (3) se obtiene uniendo con una línea recta los puntos.

☛ **18.** Dibuje las gráficas y encuentre el punto de intersección de las rectas cuyas ecuaciones sean

$$3y - 2x = 6 \text{ y } 4y + 3x = 24$$

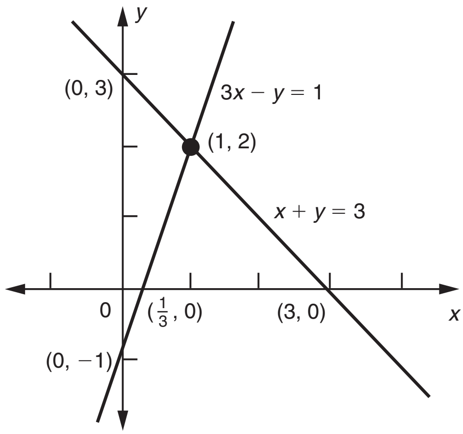


FIGURA 23

En forma análoga, encontramos los puntos $(0, -1)$ y $(\frac{1}{3}, 0)$ que pertenecen a la ecuación (4) y están sobre los ejes de coordenadas.

Cualquier pareja de valores x y y que satisfaga la ecuación (3) corresponde a un punto sobre la primera línea recta. Cualquier pareja de valores que satisfaga la ecuación (4) corresponde a un punto (x, y) en la segunda línea recta. En consecuencia, si x y y satisfacen *a la vez* las dos ecuaciones, el punto (x, y) debe estar situado en *ambas* líneas. En otras palabras, (x, y) debe ser el punto en que las líneas se intersecan. En la figura 23, advertimos que este punto es (1, 2), de modo que la solución en este caso es $x = 1$ y $y = 2$, como ya se había establecido. ☛ **18**

Ahora regresamos al sistema general de ecuaciones lineales.

$$a_1x + b_1y = c_1 \tag{1}$$

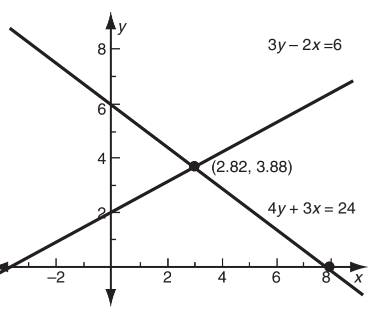
$$a_2x + b_2y = c_2 \tag{2}$$

Las gráficas de estas dos ecuaciones constan de dos líneas rectas en el plano xy, dado que cualquier ecuación lineal siempre representa una línea recta, como vimos en la sección 4-2. Cualquier pareja de valores x y y que satisfacen a la vez las ecuaciones (1) y (2) deben corresponder a un punto (x, y) que esté situado en ambas líneas.

Denotemos las rectas por L y M, respectivamente. Surgen entonces tres posibilidades.

1. Las líneas L y M se intersecan. Ya que el punto de intersección (x_0, y_0), está situado en ambas, las coordenadas (x_0, y_0) satisfacen las ecuaciones de ambas

Respuesta $x = \frac{48}{17} \approx 2.82$
$y = \frac{66}{17} \approx 3.88$



líneas, y de aquí, dan una solución al sistema dado. *Esta solución es única,* porque si las dos líneas se intersecan, lo hacen en un solo punto. (Véase la parte *a*) de la figura 24).

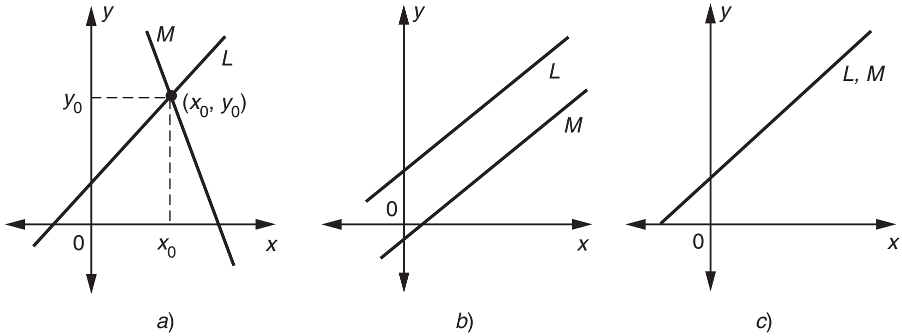


FIGURA 24

2. Las líneas L y M son paralelas. En este caso, las líneas no se cortan y no hay ningún punto sobre ambas. Por lo que no habrá valores de x y de y que satisfagan ambas ecuaciones. En otras palabras, en este caso las ecuaciones *no tienen solución*. (Véase la parte *b*) de la figura 24).
3. Las líneas L y M coinciden. En tal caso, cada punto sobre la línea L también está sobre la línea M. En esta situación, el sistema tiene *un número infinito de soluciones*; es decir, cada pareja ordenada (x, y) sobre L $(= M)$. (Véase la parte *c*) de la figura 24).

EJEMPLO 3 Resuelva el sistema de ecuaciones siguiente:

$$x + 2y = 4$$
$$3x + 6y - 8 = 0$$

Solución Resolvamos la primera ecuación para x:

$$x = 4 - 2y$$

Luego, sustituyamos este valor de x en la segunda ecuación y simplifiquemos.

$$\begin{aligned} 3(4 - 2y) + 6y - 8 &= 0 \\ 12 - 6y + 6y - 8 &= 0 \\ 4 &= 0 \end{aligned}$$

Esto es imposible. Por tanto, las ecuaciones *no tienen solución*. Esto se ilustra gráficamente en la figura 25. En este caso las dos líneas rectas son paralelas y no se intersectan. Podemos ver esto de inmediato escribiendo las ecuaciones dadas en la forma pendiente-ordenada al origen.

$$y = -\tfrac{1}{2}x + 2$$

$$y = -\tfrac{1}{2}x + \tfrac{4}{3}$$

☛ **19.** ¿Cuántas soluciones tiene cada uno de los sistemas siguientes?

a) $x - 3y = 1,\ y = \frac{1}{3}x - 1$

b) $3y = 5x - 2$
$x + y + 2 = 4(y - x + 1)$

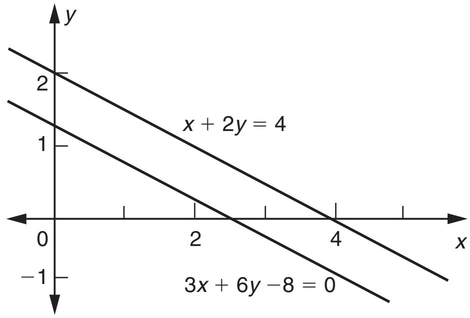


FIGURA 25

Las dos líneas tienen *la misma pendiente* ($-\frac{1}{2}$) pero distintas ordenadas al origen. En consecuencia, las dos líneas son paralelas, sin punto de intersección común.

EJEMPLO 4 Resuelva el sistema de ecuaciones.

$$2x - 3y = 6 \qquad \text{(i)}$$

$$\frac{x}{3} - \frac{y}{2} = 1 \qquad \text{(ii)}$$

Solución Multiplicamos ambos lados de la segunda ecuación por -6, y obtenemos

$$-2x + 3y = -6$$

Sumando esta ecuación con la primera, resulta

$$0 = 0$$

una ecuación que siempre es válida.

Escribiendo las dos ecuaciones en la forma pendiente-ordenada al origen, encontramos que se reducen a la ecuación:

$$y = \tfrac{2}{3}x - 2$$

Respuesta *a*) Ninguna solución; *b*) un número infinito de soluciones.

Dado que las dos ecuaciones son idénticas, las dos líneas coinciden en este caso y las dos ecuaciones dadas son equivalentes. En realidad, la ecuación (ii) puede obtenerse de la ecuación (i) multiplicando la última por $\frac{1}{6}$. En este caso, tenemos un número infinito de soluciones: cualquier pareja de valores (x, y) que satisfaga la ecuación (i) dará una solución. Por ejemplo, una de tales parejas es (6, 2), otra es (0, −2). ☛ **19, 20**

☛ **20.** ¿Para qué valores de c el sistema siguiente no tiene solución y para cuáles tiene un número infinito de soluciones?

$$2y + x + 6 = 0,\ y = c - \frac{1}{2}x$$

El método de sustitución a menudo es útil cuando tenemos un sistema de ecuaciones donde una ecuación es lineal y la otra no.

EJEMPLO 5 Resuelva el sistema de ecuaciones siguiente:

$$2x - y = 3$$

$$x^2 + y^2 = 5$$

Respuesta Si $c \neq -3$, no tiene solución; si $c = -3$ tiene un número infinito de soluciones.

Solución En este sistema, una de las ecuaciones no es lineal. El método de solución consiste en la eliminación de una de las dos variables, x o y, de las dos ecuaciones. De la primera ecuación, tenemos

$$y = 2x - 3$$

Sustituimos este valor de y en la segunda ecuación y simplificamos.

$$\begin{aligned} x^2 + (2x - 3)^2 &= 5 \\ x^2 + 4x^2 - 12x + 9 &= 5 \\ 5x^2 - 12x + 4 &= 0 \end{aligned}$$

La factorización que resulta es

$$(x - 2)(5x - 2) = 0$$

Por tanto, tenemos las posibilidades

$$\begin{array}{ccc} x - 2 = 0 & \text{o bien} & 5x - 2 = 0 \\ x = 2 & & x = \frac{2}{5} \end{array}$$

Ahora, sustituimos estos valores en la ecuación que usamos al principio para sustituir por y, a saber* $y = 2x - 3$.

$$\begin{array}{l|l} y = 2x - 3 & y = 2x - 3 \\ \quad = 2(2) - 3 & \quad = 2\left(\frac{2}{5}\right) - 3 \\ \quad = 1 & \quad = -\frac{11}{5} \end{array}$$

☛ **21.** Utilice sustitución para resolver el sistema $x + 2y = 8$, $xy = 6$

En consecuencia, hay dos soluciones:

$$x = 2, y = 1 \quad \text{y} \quad x = \tfrac{2}{5}, y = -\tfrac{11}{5}.$$ ☛ **21**

Continuamos con la resolución de un problema aplicado que requiere ecuaciones simultáneas.

EJEMPLO 6 ***(Mezclas)*** La tienda El Sol, que se especializa en todo tipo de frituras, vende cacahuates a \$0.70 la libra y almendras a \$1.60 la libra. Al final de un mes, el propietario se entera de que los cacahuates no se venden bien y decide mezclar cacahuates con almendras para producir una mezcla de 45 libras, que venderá a \$1.00 la libra. ¿Cuántas libras de cacahuates y de almendras deberá mezclar para mantener los mismos ingresos?

Solución Sea x las libras de cacahuates que la mezcla contiene y y las libras correspondientes de almendras. Dado que el peso total de la mezcla es de 45 libras,

$$x + y = 45$$

El ingreso de x libras de cacahuates a \$0.70 la libra es de $0.7x$ dólares y el ingreso

Respuesta Dos soluciones:

$x = 2$, $y = 3$ y $x = 6$, $y = 1$

*Sería incorrecto sustituir los valores de x en la ecuación no lineal.

de y libras de almendras a \$1.60 la libra es de $1.6y$ dólares. El ingreso obtenido de la mezcla de 45 libras a \$1.00 por libra será de \$45. Dado que el ingreso de la mezcla deberá ser el mismo que el de las frutas separadas, tenemos la siguiente ecuación:

$$\text{Ingreso de los cacahuates} + \text{Ingreso de las almendras} = \text{Ingreso de la mezcla}$$

$$0.7x + 1.6y = 45$$

$$7x + 16y = 450$$

De esta manera, llegamos al sistema de ecuaciones lineales siguiente:

$$x + y = 45$$

$$7x + 16y = 450$$

De la primera ecuación, obtenemos que $x = 45 - y$. Luego sustituimos este valor de x en la ecuación de abajo y despejamos y.

$$7(45 - y) + 16y = 450$$
$$315 - 7y + 16y = 450$$
$$9y = 450 - 315 = 135$$
$$y = 15$$

☛ **22.** En el ejemplo 6, encuentre las cantidades que deben mezclarse para obtener 40 libras de una mezcla que cueste \$1.15 por libra

Por tanto, $x = 45 - y = 45 - 15 = 30$.

En consecuencia, 30 libras de cacahuates deberán mezclarse con 15 libras de almendras para formar la mezcla. ☛ **22**

El método de sustitución también puede utilizarse con frecuencia para resolver sistemas de ecuaciones con tres o más variables. Tales sistemas se estudian con detalle en la sección 9-3, pero mientras tanto hagamos un ejemplo.

EJEMPLO 7 Resuelva el sistema de ecuaciones siguiente para x, y y z.

$$x - y - z = 1$$

$$2x + y + 3z = 6$$

$$-4x - 2y + 3z = 6$$

Solución Resolvemos la primera ecuación para x en términos de y y z.

$$x = 1 + y + z$$

Enseguida sustituimos esta expresión para x en las dos ecuaciones restantes:

$$2(1 + y + z) + y + 3z = 6$$

$$-4(1 + y + z) - 2y + 3z = 6$$

Después de simplificar, obtenemos

$$3y + 5z = 4$$

$$-6y - z = 10$$

Respuesta $x = 20$, $y = 20$

Ahora tenemos que resolver dos ecuaciones en y y z. De la última de éstas tenemos que $z = -6y - 10$ y sustituyendo esto en la primera ecuación:

$$3y + 5(-6y - 10) = 4$$
$$-27y = 54$$
$$y = -2$$

Con la finalidad de completar la solución calculamos z y por último x.

$$z = -6y - 10 = -6(-2) - 10 = 2$$
$$x = 1 + y + z = 1 + (-2) + 2 = 1$$

La solución es, por tanto, $x = 1$, $y = -2$ y $z = 2$.

Observación El método de suma también puede utilizarse para eliminar una de las variables, dejando un sistema de dos ecuaciones para las dos variables restantes.

EJERCICIOS 4-4

(1-24) Resuelva los siguientes sistemas de ecuaciones.

1. $x - y = 1$ y $2x + 3y + 8 = 0$

2. $2x - 3y = 1$ y $5x + 4y = 14$

3. $4x - y = -2$ y $3x + 4y = 27$

4. $3u + 2v = 9$ y $u + 3v = 10$

5. $3x + 5t = 12$ y $4x - 3t = -13$

6. $2p - q = 3$ y $p = 5 - 3q$

7. $7x - 8y = 4$ y $\dfrac{x}{2} + \dfrac{y}{3} = 3$

8. $\dfrac{x+y}{2} - \dfrac{x-y}{3} = 8$ y $\dfrac{x+y}{3} + \dfrac{x-y}{4} = 11$

9. $\dfrac{x}{4} + \dfrac{y}{5} + 1 = \dfrac{x}{5} + \dfrac{y}{4} = 23$

10. $\dfrac{x-2y}{3} = 2 + \dfrac{2x+3y}{4}$ y

$\dfrac{3x-2y}{2} = \dfrac{-y+5x+11}{4}$

11. $5x - 7y + 2 = 0$ y $15x - 21y = 7$

12. $2u - 3v = 12$ y $-\dfrac{u}{3} + \dfrac{v}{2} - 4$

13. $x + 2y = 4$ y $3x + 6y = 12$

14. $2p + q = 3$ y $\frac{2}{3}p + \frac{1}{3}q = 1$

15. $x + y = 3$
$y + z = 5$
$x + z = 4$

16. $x + 2y = 1$
$3y + 5z = 7$
$2x - y = 7$

17. $x + y + z = 6$
$2x - y + 3z = 9$
$-x + 2y + z = 6$

18. $x + 2y - z = -3$
$+ 3y + 4z = 5$
$2x - y + 3z = 9$

19. $3x_1 + 2x_2 + x_3 = 6$
$2x_1 - x_2 + 4x_3 = -4$
$x_1 + x_2 - 2x_3 = 5$

20. $2u - 2v - 4w = 13$
$u + v + w = 6$
$-3u + 2v - w + 1 = 0$

21. $x + 3y + 4z = 1,$
$2x + 7y + z = -7$
$3x + 10y + 8z = -3$

22. $3x - 2y + 4z = 3$
$4x + 3y = 9$
$2x + 4y + z = 0$

23. $x + y = 3$ y $x^2 + y^2 = 29$

24. $2x + y = 5$ y $xy = 2$

25. *(Purificación de minerales)* Dos metales, X y Y, pueden extraerse de dos tipos de mineral, I y II. Cien libras de mineral I producen 3 onzas de X y 5 onzas de Y, por otro lado, 100 libras del mineral II producen 4 onzas de X y 2.5 onzas de Y. ¿Cuántas libras de los minerales I y II se requerirán para producir 72 onzas de X y 95 onzas de Y?

26. *(Asignación de máquinas)* Una empresa fabrica dos productos, A y B. Cada producto tiene que ser procesado por dos máquinas, I y II. Cada unidad del tipo A requiere 1 hora de procesamiento de la máquina I y 1.5 horas por la máquina II y cada unidad del tipo B requiere de 3 horas en la máquina I y 2 horas en la máquina II. Si la máquina I está disponible 300 horas al mes y la máquina II 350 horas, ¿cuántas unidades de cada tipo podrá fabricar al mes si utiliza el tiempo total que dispone en las dos máquinas?

27. *(Decisiones de adquisición)* Una compañía trata de adquirir y almacenar dos tipos de artículos, X y Y. Cada artículo X cuesta \$3 y cada artículo Y cuesta \$2.50. Cada artículo X ocupa 2 pies cuadrados del espacio del piso y cada artículo Y ocupa un espacio de 1 pie cuadrado del piso. ¿Cuántas unidades de cada tipo pueden adquirirse y almacenarse si se dispone de \$400 para la adquisición y 240 pies cuadrados de espacio para almacenar estos artículos?

28. *(Mezcla de cafés)* Una tienda vende dos tipos de café, uno a \$2.00 el kilo y el otro a \$1.50 por la misma cantidad. El propietario de la tienda produce 50 kilos de una nuevo producto de café mezclando estos dos tipos y vendiéndolo a \$1.60 el kilo. ¿Cuántos kilos de café de cada tipo deberá mezclar para no alterar los ingresos?

29. *(Mezclas)* Un almacén de productos químicos tiene dos tipos de soluciones ácidas. Una de ellas contiene 25% de ácido y la otra contiene 15%. ¿Cuántos galones de cada tipo deberá mezclar para obtener 200 galones de una mezcla que contenga 18% de ácido?

30. *(Política tributaria de los ingresos)* La Secretaría de Hacienda fija cierta tasa de impuestos a los primeros \$5000 de ingresos gravables, y una tasa diferente sobre los ingresos gravables por encima de los \$5000 pero menores que \$10,000. El gobierno desea fijar las tasas de impuestos en tal forma que una persona con un ingreso gravable de \$7000 tenga que pagar \$950 en impuestos; mientras que otra con un ingreso gravable de \$9000 deba pagar \$1400 de impuestos. Encuentre las dos tasas.

31. *(Plantilla de personal)* Cierta compañía emplea 53 personas en dos sucursales. De esta gente, 21 son universitarios graduados. Si una tercera parte de las personas que laboran en la primera sucursal; y tres séptimos de los que se encuentran en la segunda sucursal, son universitarios graduados, ¿cuántos empleados tiene cada oficina?

32. *(Inversiones)* Una persona invierte un total de \$25,000 en tres diferentes inversiones al 8, 10 y 12%. Los intereses totales al cabo de un año fueron de \$2440 y los intereses por las inversiones al 8 y 12% fueron iguales. ¿Cuánto invirtió a cada tasa?

33. *(Decisiones de producción)* Una planta de fertilizantes produce tres tipos de fertilizantes. El tipo A contiene 25% de potasio, 45% de nitrato y 30% de fosfato. El tipo B contiene 15% de potasio, 50% de nitrato y 35% de fosfato. El tipo C no contiene potasio, tiene 75% de nitrato y 25% de fosfato. La planta tiene suministros de 1.5 toneladas diarias de potasio, 5 toneladas al día de nitrato y de 3 toneladas al día de fosfato. ¿Qué cantidad de cada tipo de fertilizante deberá producir de modo que agote los suministros de ingredientes?

34. *(Ecología)* Un pez de la especie 1 consume por día 10 gramos de comida 1 y 5 gramos de comida 2. Un pez de la especie 2 consume por día 6 gramos de comida 1 y 4 gramos de comida 2. Si un medio ambiente dado tiene 2.2 kilogramos de comida 1 y 1.3 kilogramos de comida 2 disponible diariamente, ¿qué tamaño de población de las dos especies consumirá toda la comida disponible?

35. *(Ecología)* Tres especies distintas de pájaros comen pulgones de diferentes partes de los árboles. La especie 1 se alimenta la mitad del tiempo en los niveles altos y la otra mitad del tiempo en los niveles medios de los árboles. La especie 2 se alimenta la mitad en los niveles medios y la mitad en los niveles bajos. La especie 3 se alimenta sólo en los niveles bajos. Hay igual cantidad de pulgones aprovechables en los niveles medios y bajos, pero solamente la mitad correspondiente en los niveles superiores. ¿Qué tamaño relativo deben tener las poblaciones de las tres especies de manera que el suministro de pulgones se consuma por completo?

■ 4-5 APLICACIONES A ADMINISTRACIÓN Y ECONOMÍA

En esta sección analizaremos algunas aplicaciones importantes de los sistemas de ecuaciones.

Análisis del punto de equilibrio

Si el costo total y_c de producción excede al de los ingresos y_I obtenidos por las ventas, entonces el negocio sufre una pérdida. Por otra parte, si los ingresos sobrepasan los costos, existe una utilidad. Si el costo de producción es igual a los ingresos obtenidos por las ventas, no hay utilidad ni pérdida, de modo que el negocio está en el punto de equilibrio. El número de unidades producidas y vendidas en este caso se denomina **punto de equilibrio**.

EJEMPLO 1 ***(Análisis del punto de equilibrio)*** Para un fabricante de relojes, el costo de mano de obra y de los materiales por reloj es de \$15 y los costos fijos son de \$2000 al día. Si vende cada reloj a \$20, ¿cuántos relojes deberá producir y vender cada día con objeto de garantizar que el negocio se mantenga en el punto de equilibrio?

Solución Sea x el número de relojes producidos y vendidos cada día. El costo total de producir x relojes es

$$y_c = \text{Costos variables totales} + \text{Costos fijos} = 15x + 2000$$

Dado que cada reloj se vende a \$20, el ingreso y_I obtenido por vender x relojes es

$$y_I = 20x$$

El punto de equilibrio se obtiene cuando los ingresos son iguales a los costos, es decir,

$$20x = 15x + 2000$$

Obtenemos que $5x = 2000$ o $x = 400$.

De modo que deberá producir y vender al día 400 relojes para garantizar que no haya utilidades ni pérdidas. La figura 26 da una interpretación gráfica del punto de equilibrio. Cuando $x < 400$, el costo y_c excede a los ingresos y_I y hay pérdidas. Cuando $x > 400$, los ingresos y_I exceden los costos y_c de modo que se obtiene una utilidad.

Obsérvese que gráficamente, el punto de equilibrio corresponde a la intersección de las dos líneas rectas. Una de las líneas tiene la ecuación $y = 15x + 2000$, la que corresponde al costo de producción, y la otra tiene la ecuación $y = 20x$, la que corresponde a los ingresos. ☛ **23**

☛ **23.** Si los costos fijos son \$5000 semanales, los costos variables son \$21 por unidad y el precio de venta es \$46 por unidad, determine el punto de equilibrio

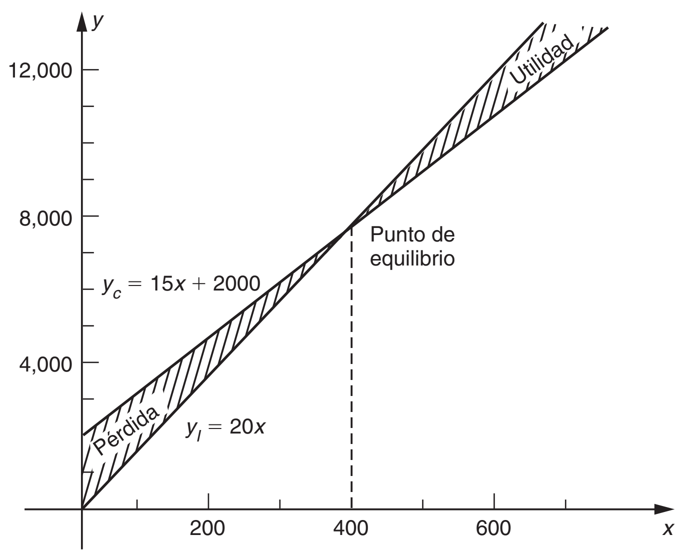


FIGURA 26

Respuesta 200 unidades semanales

EJEMPLO 2 ***(Análisis del punto de equilibrio)*** Supóngase que el costo total diario (en dólares) de producir x sillas está dado por

$$y_c = 2.5x + 300$$

a) Si cada silla se vende a \$4, ¿cuál es el punto de equilibrio?

b) Si el precio de venta se incrementa a \$5 por silla, ¿cuál es el nuevo punto de equilibrio?

c) Si se sabe que al menos 150 sillas pueden venderse al día, ¿qué precio deberá fijarse con el objeto de garantizar que no haya pérdidas?

Solución El costo está dado por

$$y_c = 2.5x + 300$$

a) Si cada silla se vende a \$4, el ingreso (en dólares) obtenido por la venta de x sillas es

$$y_I = 4x$$

En el punto de equilibrio tenemos que $y_c = y_I$; es decir,

$$4x = 2.5x + 300$$

Así, $1.5x = 300$ o $x = 200$. El punto de equilibrio está en 200 sillas.

b) Si el precio de venta se incrementa a \$5 por silla, el ingreso en este caso es

$$y_I = 5x$$

En el punto de equilibrio $y_I = y_c$, de modo que

$$5x = 2.5x + 300$$

En consecuencia, $2.5x = 300$ o $x = 120$. Con el nuevo precio de venta, el punto de equilibrio es de 120 sillas.

c) Sea p dólares el precio fijado a cada silla. Entonces, los ingresos obtenidos por la venta de 150 sillas es $y_I = 150p$ y el costo de producir 150 sillas es $y_c = 2.5(150) + 300 = 675$. Con la finalidad de garantizar una situación de equilibrio debemos tener que $y_I = y_c$; es decir,

$$150p = 675 \quad \text{o} \quad p = 4.50$$

Por tanto, el precio fijado a cada silla debe ser \$4.50 con el propósito de garantizar que no haya ganancias ni pérdidas (en el peor de los casos), si al menos se venden al día 150 sillas.

Debe señalarse que cuando un economista utiliza una relación lineal para describir la dependencia entre dos variables, no se puede afirmar que la verdadera relación pueda ser lineal, sino más bien, que una relación lineal es una buena aproximación de los datos observados sobre el rango que nos interesa. Si los datos observados se encuentran sobre o cerca de una línea recta, podemos usar una relación lineal como una representación aproximada de los datos. La manera en que esto puede realizarse se describirá en la sección 18-6.

Si bien, los datos observados pueden estar cerca de una línea recta, en muchos casos no es así y en tales situaciones no es razonable emplear una ecuación lineal para aproximar la relación entre las dos variables. Por ejemplo, el costo de fabricar x artículos de cierto tipo puede no estar dado por un modelo de costo lineal, $y_c = mx + b$, si no que puede depender de x en una forma más complicada. En principio, un análisis del punto de equilibrio puede quedar sin alteración en tales casos, pero el álgebra requerida para encontrar el punto de equilibrio se complica.

EJEMPLO 3 ***(Análisis no lineal del punto de equilibrio)*** Una compañía de dulces vende sus cajas de chocolates a \$2 cada una. Si x es el número de cajas producidas a la semana (en miles), entonces el administrador sabe que los costos de producción están dados, en dólares, por

$$y_c = 1000 + 1300x + 100x^2$$

Determine el nivel de producción en que la compañía no obtiene utilidades ni pérdidas (punto de equilibrio).

Solución Los ingresos por vender x miles de cajas a \$2 cada una están dados por

$$y_I = 2000x$$

Con el objeto de quedar en el punto de equilibrio, los ingresos deben ser iguales a los costos; de modo que

$$1000 + 1300x + 100x^2 = 2000x$$

Dividiendo ambos lados de la ecuación entre 100 y pasando todos los términos a la izquierda, tenemos que

$$x^2 - 7x + 10 = 0$$

Si factorizamos esta expresión, obtenemos

$$(x - 2)(x - 5) = 0$$

y así $x = 2$ y $x = 5$.

Por tanto, encontramos que hay dos puntos de equilibrio en este problema. La compañía puede decidir fabricar 2000 cajas a la semana ($x = 2$), con ingresos y costos iguales a \$4000. O puede fabricar 5000 cajas a la semana ($x = 5$), cuando los ingresos y los costos estén otra vez en un equilibrio de \$10,000.

En este ejemplo es conveniente considerar las utilidades de la compañía. La utilidad mensual U está dada por los ingresos menos los costos.

$$\begin{aligned} U &= y_I - y_c \\ &= 2000x - (1000 + 1300x + 100x^2) \\ &= -1000 + 700x - 100x^2 \\ &= -100(x - 2)(x - 5) \end{aligned}$$

☛ **24.** Si los costos diarios de una compañía son $20{,}000 + 200x - x^2$, cuando se producen x unidades en un día, y el precio de venta es \$100 por unidad, determine el punto de equilibrio.

Respuesta 200 unidades diarias.

Cuando $x = 2$ o 5, la utilidad es cero y éstos son los puntos de equilibrio. Cuando $2 < x < 5$, tenemos que $x - 2 > 0$ y $x - 5 < 0$. Dado que el producto contiene dos signos negativos, U es positiva en este caso. En consecuencia, la compañía obtiene una utilidad positiva cuando $2 < x < 5$; es decir, cuando fabrica y vende entre 2000 y 5000 cajas a la semana. ☛ **24**

Punto de equilibrio del mercado

Si el precio de cierto artículo es demasiado alto, los consumidores no lo adquirirán, mientras que si es demasiado bajo, los proveedores no lo venderán. En un mercado competitivo, cuando el precio por unidad depende sólo de la cantidad demandada y de la oferta, siempre existe una tendencia del precio a ajustarse por sí mismo, de modo que la cantidad demandada por los consumidores iguale la cantidad que los productores están dispuestos a ofrecer. Se dice que el **punto de equilibrio del mercado** ocurre en un precio cuando la cantidad demandada es igual a la cantidad ofrecida. Esto corresponde al punto de intersección de las curvas de la oferta y la demanda. (Véase la figura 27).*

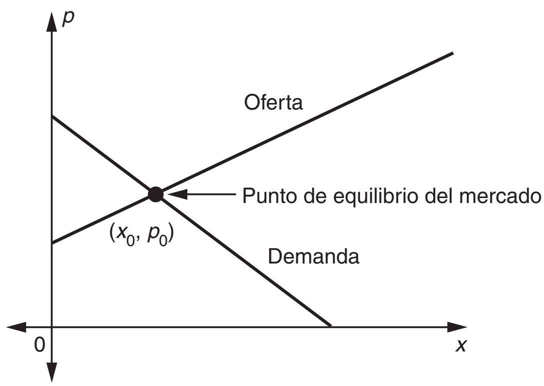


FIGURA 27

Algebraicamente, el precio de equilibrio del mercado p_0 y la cantidad de equilibrio x_0 se determina resolviendo las ecuaciones de la oferta y la demanda simultáneamente para p y x. Nótese que el precio y la cantidad de equilibrio sólo tienen sentido cuando no son negativas.

EJEMPLO 4 Determine el precio de equilibrio y la cantidad de equilibrio de las leyes de la oferta y la demanda siguientes:

$$D: \quad p = 25 - 2x \tag{1}$$

$$S: \quad p = 3x + 5 \tag{2}$$

Solución Igualando los dos valores de p en las ecuaciones (1) y (2), tenemos que

$$3x + 5 = 25 - 2x$$

*Algunos modelos sencillos de la forma en que un mercado se autoajusta al equilibrio se describen en la sección 17-6.

☛ **25.** Si la ley de la demanda es $2p + 3x = 36$ y la ley de la oferta es $2p = x + 12$, grafique las curvas de la oferta y la demanda y determine el punto de equilibrio del mercado.

Fácilmente se ve que la solución es $x = 4$. Sustituyendo $x = 4$ en la ecuación (1), resulta

$$p = 25 - 8 = 17$$

En consecuencia, el precio de equilibrio es 17 y la cantidad de equilibrio es de 4 unidades. Las gráficas de las curvas de la oferta y la demanda aparecen en la siguiente figura.

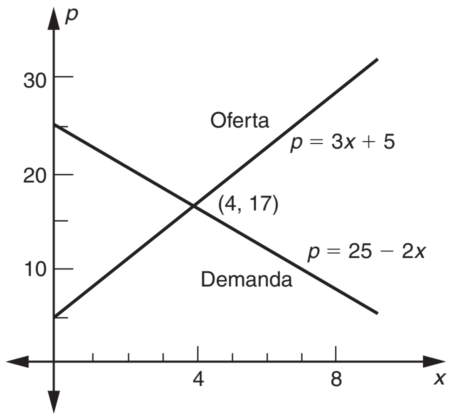


FIGURA 28

EJEMPLO 5 Si las ecuaciones de la demanda y la oferta son, respectivamente,

$$D: \quad 3p + 5x = 22 \tag{3}$$
$$S: \quad 2p - 3x = 2x \tag{4}$$

determine los valores de x y p en el punto de equilibrio del mercado.

Solución Las ecuaciones (3) y (4) forman un sistema de ecuaciones lineales en las variables x y p. Resolvamos este sistema por el método de eliminación. Multiplicando ambos lados de la ecuación (3) por 3 y los dos miembros de la ecuación (4) por 5, obtenemos

$$9p + 15x = 66$$
$$10p - 15x = 10$$

Enseguida sumamos estas dos ecuaciones y simplificamos.

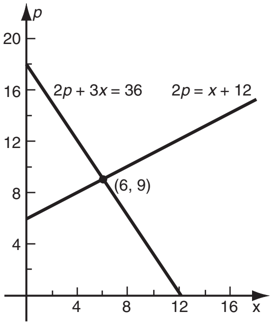
$$9p + 15x + 10p - 15x = 66 + 10$$
$$19p = 76$$

Así que, $p = 4$. Sustituyendo este valor de p en la ecuación (3), obtenemos

$$3(4) + 5x = 22$$

Por tanto, $x = 2$. El punto de equilibrio del mercado ocurre cuando $p = 4$ y $x = 2$. ☛ **25**

Respuesta $x = 6, p = 9$



Como la mayoría de las relaciones lineales en economía, las ecuaciones lineales de demanda y oferta dan una representación aproximada de las relaciones exactas entre precio y cantidad, y surgen casos en que tales aproximaciones lineales no son adecuadas. La determinación del punto de equilibrio del mercado, cuando la ecuación de demanda o la ecuación de la oferta (o ambas) no son lineales, pueden requerir cálculos muy complicados.

EJEMPLO 6 ***(Punto de equilibrio del mercado)*** La demanda para los bienes producidos por una industria están dados por la ecuación $p^2 + x^2 = 169$, en donde p es el precio y x es la cantidad demandada. La oferta está dada por $p = x + 7$. ¿Cuáles son el precio y la cantidad del punto de equilibrio?

Solución El precio y la cantidad del punto de equilibrio son los valores positivos de p y x que satisfacen a la vez las ecuaciones de la oferta y la demanda.

$$p^2 + x^2 = 169 \tag{5}$$

$$p = x + 7 \tag{6}$$

Sustituyendo el valor de p de la ecuación (6) en la ecuación (5) y simplificando, resulta:

$$\begin{aligned} (x + 7)^2 + x^2 &= 169 \\ 2x^2 + 14x + 49 &= 169 \\ x^2 + 7x - 60 &= 0 \end{aligned}$$

Factorizando, encontramos que

$$(x + 12)(x - 5) = 0$$

lo cual da $x = -12$ o 5. El valor negativo de x es inadmisible, de modo que $x = 5$. Sustituyendo $x = 5$ en la ecuación (6),

$$p = 5 + 7 = 12$$

En consecuencia, el precio de equilibrio es 12 y la cantidad de equilibrio es 5.

Impuestos especiales y punto de equilibrio del mercado

Con frecuencia, el gobierno grava con impuestos adicionales ciertos artículos con el propósito de obtener más ingresos o dar más subsidios a los productores, para que hagan accesibles estos artículos a los consumidores a precios razonables. Consideraremos el efecto de un impuesto adicional o subsidio sobre el punto de equilibrio del mercado con las suposiciones siguientes:

1. La cantidad demandada por los consumidores sólo depende del precio de mercado. Denote este precio pagado por los consumidores mediante p_c.
2. La cantidad ofrecida por los proveedores está determinada por el precio recibido por ellos. Denote este precio por medio de p_s.
3. El precio pagado por los consumidores iguala al precio recibido por los proveedores más el impuesto t por unidad: $p_c = p_s + t$. Si, en lugar de eso, se da un subsidio de s por unidad, entonces $p_c = p_s - s$.

EJEMPLO 7 ***(Subsidio y punto de equilibrio del mercado)*** La ley de la demanda para cierto artículo es $5p + 2x = 200$ y la ley de la oferta es $p = \frac{4}{5}x + 10$.

a) Determine el precio y cantidad de equilibrio.

b) Encuentre el precio y la cantidad de equilibrio después de que se ha fijado un impuesto de 6 por unidad. Determine el incremento en el precio y la disminución en la cantidad demandada.

c) ¿Qué subsidio provocará que la cantidad demandada se incremente en 2 unidades?

Solución Las ecuaciones de demanda y de oferta son las siguientes:

$$D: \quad 5p + 2x = 200 \tag{7}$$

$$S: \quad p = \tfrac{4}{5}x + 10 \tag{8}$$

a) Sustituyendo el valor de p de la ecuación (8) en la ecuación (7) y simplificando obtenemos las ecuaciones:

$$\begin{aligned} 5(\tfrac{4}{5}x + 10) + 2x &= 200 \\ 4x + 50 + 2x &= 200 \\ 6x &= 150 \\ x &= 25 \end{aligned}$$

Por tanto, de la ecuación (8),

$$p = \tfrac{4}{5}(25) + 10 = 20 + 10 = 30$$

En consecuencia, el precio de equilibrio y la cantidad de equilibrio antes del gravamen son

$$p = 30 \quad \text{y} \quad x = 25$$

b) Sea p_c el precio pagado por los consumidores y p_s el precio recibido por los proveedores. Entonces las ecuaciones (7) y (8) se transforman en

$$D: \quad 5p_c + 2x = 200 \tag{9}$$

$$S: \quad p = \tfrac{4}{5}x + 10 \tag{10}$$

Si se cobra un impuesto de 6 por unidad, entonces $p_c = p_s + 6$, de modo que la ecuación de oferta puede escribirse como

$$S: \quad p_c - 6 = \tfrac{4}{5}x + 10$$

o

$$p_c = \tfrac{4}{5}x + 16 \tag{11}$$

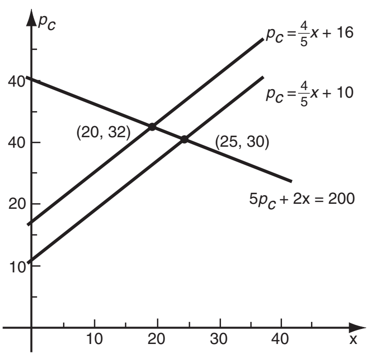
Sustituyendo el valor de p_c de la ecuación (11) en la ecuación (9), obtenemos

$$5(\tfrac{4}{5}x + 16) + 2x = 200$$

La solución es $x = 20$. Por tanto, de la ecuación (11),

$$p_c = \tfrac{4}{5}(20) + 16 = 32$$

Respuesta En el plano de x y precio del consumidor, p_c, el efecto de los impuestos, es mover la curva de la oferta hacia arriba.



☛ **26.** En el ejemplo 7, grafique las ecuaciones de la oferta y demandas originales (7) y (8) y las ecuaciones de la oferta y la demanda modificadas (9) y (11) en los mismos ejes. Muestre los dos puntos de equilibrio. Geométricamente, ¿cuál es el efecto de los impuestos a las ventas?

☛ **27.** Vuelva a resolver las partes *a*) y *b*) del ejercicio 7, si la ecuación de la oferta se cambia a $p = x + 12$ y si, en la parte *b*), se cobra un impuesto a las ventas de 7 por unidad.

Respuesta *a*) $x = 20, p = 32$
b) $x = 15, p_c = 34$

Comparando con la parte *a*), vemos que el efecto de los impuestos es aumentar el precio del mercado en 2 (de 30 a 32) y disminuir la demanda del mercado en 5 (de 25 a 20). ☛ **26, 27**

c) Nuevamente sea p_c el precio pagado por los consumidores y p_s el precio recibido por los proveedores, de modo que las ecuaciones de demanda y oferta aún están dadas por las ecuaciones (9) y (10). Esta vez, $p_c = p_s - s$, en donde s es el subsidio por unidad.

Deseamos tener demanda de 2 más que la demanda de equilibrio de 25, esto es $x = 27$. Entonces, de la ecuación (9),

$$p_c = \tfrac{1}{5}(200 - 2x) = \tfrac{1}{5}(200 - 54) = 29.2$$

y de la ecuación (10),

$$p_s = 10 + \tfrac{4}{5}x = 10 + \tfrac{4}{5}(27) = 31.6$$

Por tanto, $s = p_s - p_c = 31.6 - 29.2 = 2.4$. Un subsidio de 2.4 por unidad aumentará la demanda en 2 unidades.

EJERCICIOS 4-5

1. *(Análisis del punto de equilibrio)* El costo variable de producir cierto artículo es de 90¢ por unidad y los costos fijos son de \$240 al día. El artículo se vende por \$1.20 cada uno. ¿Cuántos artículos deberá producir y vender para garantizar que no haya ganancias ni pérdidas?

2. *(Análisis del punto de equilibrio)* Los costos fijos por producir cierto artículo son de \$5000 al mes y los costos variables son de \$3.50 por unidad. Si el productor vende cada uno a \$6.00, responda a cada uno de los incisos siguientes.
a) Encuentre el punto de equilibrio.
b) Determine el número de unidades que deben producirse y venderse al mes para obtener una utilidad de \$1000 mensuales.
c) Obtenga la pérdida cuando sólo 1500 unidades se producen y venden cada mes.

3. *(Análisis del punto de equilibrio)* El costo de producir x artículos está dado por $y_c = 2.8x + 600$ y cada artículo se vende a \$4.00.
a) Encuentre el punto de equilibrio.
b) Si se sabe que al menos 450 unidades se venderán, ¿cuál debería ser el precio fijado a cada artículo para garantizar que no haya pérdidas?

4. *(Análisis del punto de equilibrio)* Un fabricante produce artículos a un costo variable de 85¢ cada uno y los costos fijos son de \$280 al día. Si cada artículo puede venderse a \$1.10, determine el punto de equilibrio

5. *(Análisis del punto de equilibrio)* En el ejercicio 4, si el fabricante puede reducir el costo variable a 70¢ por artículo incrementando los costos diarios a \$350, ¿es ventajoso hacerlo así? (Tal reducción sería posible; por ejemplo, adquiriendo una nueva máquina que bajara los costos de producción pero que incrementara el cargo por intereses).

6. *(Análisis del punto de equilibrio)* El costo de producir x artículos a la semana está dado por $y_c = 1000 + 5x$. Si cada artículo puede venderse a \$7, determine el punto de equilibrio. Si el fabricante puede reducir los costos variables a \$4 por artículo incrementando los costos fijos a \$1200 a la semana, ¿le convendría hacerlo?

7. *(Análisis no lineal del punto de equilibrio)* El costo de producir x artículos al día está dado en dólares por $y_c = 80 + 4x + 0.1x^2$. Si cada artículo puede venderse a \$10, determine el punto de equilibrio.

***8.** *(Análisis no lineal del punto de equilibrio)* El costo de producir x artículos al día está dado en dólares por $y_c = 2000 + 100\sqrt{x}$. Si cada artículo puede venderse a \$10, encuentre el punto de equilibrio.

(9-14) (*Equilibrio del mercado*) Determine el precio y cantidad de equilibrio para las curvas de demanda y oferta siguientes:

9. D: $2p + 3x = 100$
S: $p = \frac{1}{10}x + 2$

10. D: $3p + 5x = 200$
S: $7p - 3x = 56$

11. D: $4p + x = 50$
S: $6p - 5x = 10$

12. D: $5p + 8x = 80$
S: $3x = 2p - 1$

13. D: $p^2 + x^2 = 25$
S: $p = x + 1$

14. D: $p^2 + 2x^2 = 114$
S: $p = x + 3$

15. *(Equilibrio de mercado)* Un comerciante puede vender diariamente 200 unidades de cierto bien en \$30 por unidad y 250 unidades en \$27 por unidad. La ecuación de oferta para ese bien es $6p = x + 48$.

a) Determine la ecuación de demanda para el bien, suponga que es lineal.

b) Encuentre el precio y la cantidad de equilibrio.

c) Determine el precio y la cantidad de equilibrio, si se cobra un impuesto de \$3.40 por unidad del bien. ¿Cuál es el aumento en el precio y cuál la disminución en la cantidad demandada?

d) ¿Qué subsidio por unidad aumentará la demanda en 24 unidades?

e) ¿Qué impuesto aditivo por unidad debe cobrarse en el bien, de modo que el precio de equilibrio por unidad aumente en \$1.08?

16. *(Equilibrio de mercado)* A un precio de \$2400, la oferta de cierto bien es de 120 unidades; mientras que su demanda es 560 unidades. Si el precio aumenta a \$2700 por unidad, la oferta y la demanda serán de 160 y 380 unidades, respectivamente.

a) Determine las ecuaciones de demanda y oferta, suponiendo que son lineales.

b) Determine el precio y la cantidad de equilibrio.

c) Si se cobra un impuesto al bien de \$110 por unidad, ¿cuáles son los nuevos precio y cantidad de equilibrio? ¿Cuál es el aumento en el precio y la disminución en la cantidad?

d) ¿Qué subsidio por unidad disminuirá el precio de mercado en \$15?

(17-18) *(Demanda insuficiente)* Resuelva las siguientes ecuaciones de oferta y demanda. Explique en dónde estaría el equilibrio del mercado.

17. S: $p = x + 5$
D: $3p + 4x = 12$

18. S: $2p - 3x = 8$
D: $3p + 6x = 9$

19. *(Equilibrio de mercado)* Para cierto producto, si el precio es \$4 por unidad, los consumidores comprarán 10,000 unidades mensuales. Si el precio es \$5 por unidad, los consumidores comprarán 9000 unidades mensuales.

a) Suponiendo que la curva de la demanda es un línea recta, determine su ecuación.

b) La ecuación de oferta para este producto es

$$p = \begin{cases} 3.2 + \left(\dfrac{q}{2000}\right) & \text{si } 0 \le q \le 6000 \\[2ex] 5 + \left(\dfrac{q}{5000}\right) & \text{si } 6000 \le q \end{cases}$$

Determine el punto de equilibrio y la cantidad total gastada por los consumidores en este producto en el precio de equilibrio.

20. *(Múltiples puntos de equilibrio del mercado)* Un proveedor monopolizador de cierto bien está contento con suministrar una cantidad suficiente para garantizar un ingreso constante. Así, la relación de la oferta tiene la forma $xp =$ constante. Si la relación de la oferta es $xp = 3$ y la relación de demanda es $x + p = 4$, encuentre los puntos de equilibrio del mercado.

21. *(Múltiples puntos de equilibrio del mercado)* En el ejercicio anterior encuentre los puntos de equilibrio del mercado para la relación de oferta $xp = 5$ y la relación de demanda $3x + 4p = 30$.

22. *(Múltiples puntos de equilibrio del mercado)* Para un bien en particular la relación de la oferta es

$$x = \begin{cases} 6p & \text{si } 0 \le p < 1 \\[2ex] \dfrac{6}{p} & \text{si } p \ge 1 \end{cases}$$

y la relación de la demanda es $x + 2p = 7$. Determine los puntos de equilibrio del mercado.

***23.** *(Estabilidad del mercado)* Un punto de equilibrio del mercado es estable si, cuando el precio del mercado se mueve ligeramente de su valor de equilibrio, existe una tendencia para que el precio se dirija de regreso hacia el equilibrio. Sea p_0 el precio de equilibrio. Supóngase que para $p > p_0$ la cantidad suministrada, x_p, excede a la cantidad demandada, x_D. Entonces habrá una tendencia a que el precio caiga. Esto es el mercado será estable bajo aumento de precios si $x_s > x_D$ siempre que $p > p_0$. De manera análoga, si $x_s < x_D$ siempre que $p < p_0$, el mercado estará estable bajo disminución de precios. Demuestre que todos los puntos de equilibrio del mercado en los ejercicios 9 a 14 son estables. Discuta la estabilidad de cada uno de los puntos de equilibrio múltiples de los ejercicios 20 a 22.