c) **VECTORES: OPERACIONES CON VECTORES. MÓDULO DE UN VECTOR**

ALGEBRA VECTORIAL BIDIMENSIONAL

Supongamos que una tienda vende n bienes distintos, designados por $V_1, V_2, \ldots, V_n$. Cada mes se anota el número de unidades $a_1, a_2, \ldots, a_n$ de cada bien que hay en existencia. Conviene representar estas existencias por:

$$\text{Una fila } (a_1, a_2, \ldots, a_n) \quad \text{o una columna} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \qquad (*)$$

Un conjunto ordenado de números como uno de estos, que se distingue no sólo por los elementos que contiene sino por el orden en que se colocan, se llama vector. En particular, el primer vector de (*) se llama vector fila mientras que el segundo es un vector columna.

Se designa un vector por:

$$\vec{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_i, \ldots, a_n)$$

Los números $a_1, a_2, \ldots, a_i, \ldots, a_n$ se llaman las componentes (o coordenadas) del vector. El número a_i se llama la componente $i - ésima$ o la coordenada $i - ésima$. Si queremos subrayar que un vector tiene n componentes, le llamamos $n - vector$. (También se usa a menudo el término "n-upla"). De otra manera, si $\vec{a}$ es un $n - vector$, decimos que tiene dimensión n.

INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA DE LOS VECTORES

La palabra "vector" viene del latín y significa, a la vez, "transporte" y "pasajero", o "el que es llevado".

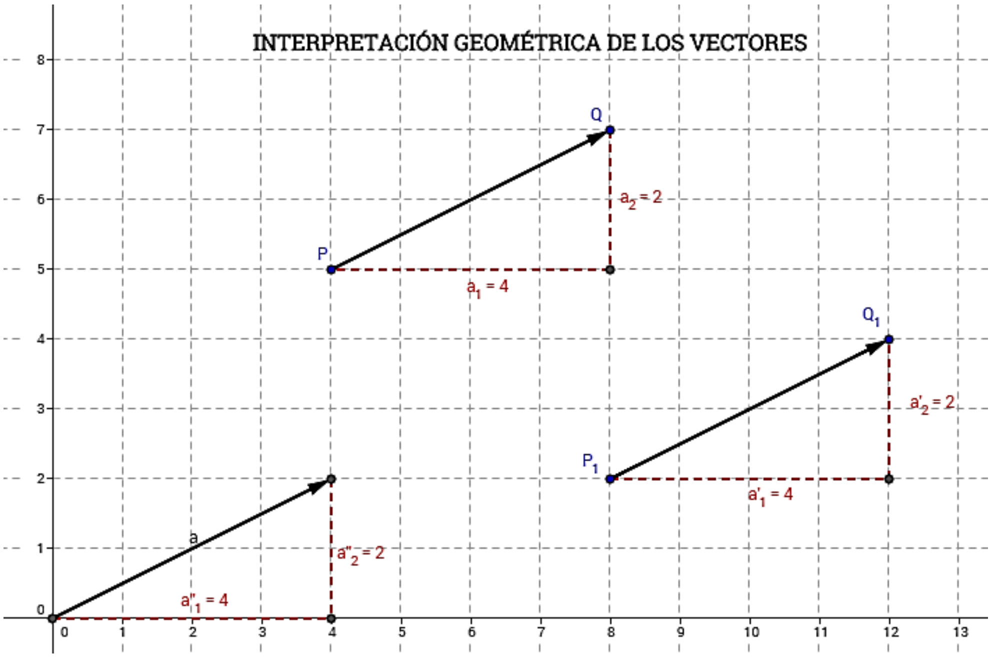
En particular, la palabra tiene relación con el acto de mover una persona u objeto de un lado a otro. Se puede describir este desplazamiento en el plano xy por la distancia a_1 que se mueve en la dirección del eje x, y por la distancia a_2 que se mueve en la direccion del eje y.

Por tanto, una traslación en el plano esta unívocamente determinada por un vector

$$\vec{a} = (a_1, a_2)$$

Geométricamente hablando, esta traslación se puede visualizar por una flecha con origen en el punto P y extremo en el punto Q.

Si desplazamos la flecha paralelamente a si misma de tal manera que su origen Aea P' y su extremo Q', la flecha resultante describirá la misma traslación, porque sus componentes x e y siguen siendo a_1 y a_2, respectivamente. Véase la Figura.



Operaciones con vectores

Adición de vectores

Dos $n - vectores$ $\vec{a}$ y $\vec{b}$ se llaman *iguales* si las componentes que ocupan los mismos lugares son iguales; entonces escribimos $\vec{a} = \vec{b}$.

Si los vectores no son iguales, escribimos $\vec{a} \neq \vec{b}$. Nótese que la igualdad sólo está definida para vectores de la misma dimensión.

Ejemplo

(i) $(x, y, z) = (2, -1, 3)$ si y sólo si $x = 2,\ y = -1,\ z = 3$.

(ii) $(m, n, p, q) = (4, -2, 1, 0)$ si y sólo si $m = 4,\ n = -2,\ p = 1$ y $q = 0$

(iii) $(1, -1, 3) \neq (-1, 1, 3)$.

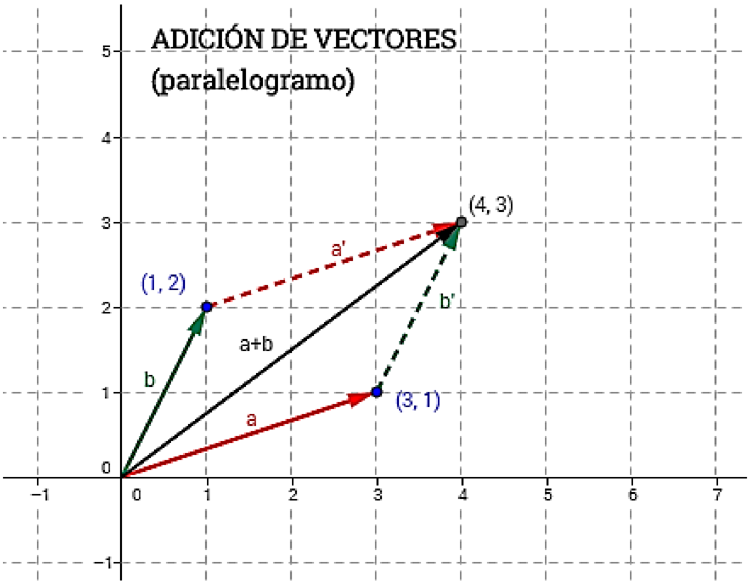
(iv) $(1, 1, 2) \neq (1, 1, 2, 2)$ porque no tienen el mismo número de componentes.

Si $\vec{a}$ y $\vec{b}$ son dos $n - vectores$, **la suma** $\vec{\boldsymbol{a}} + \vec{\boldsymbol{b}}$ de $\vec{a}$ y $\vec{b}$ es el $n - vector$ que se obtiene sumando cada componente de $\vec{a}$ con la de $\vec{b}$ que ocupa el mismo lugar.

En símbolos (para vectores fila),

$$\vec{a} + \vec{b} = (a_1, a_2, \dots, a_n) + (b_1, b_2, \dots, b_n) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots, a_n + b_n)$$

INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA



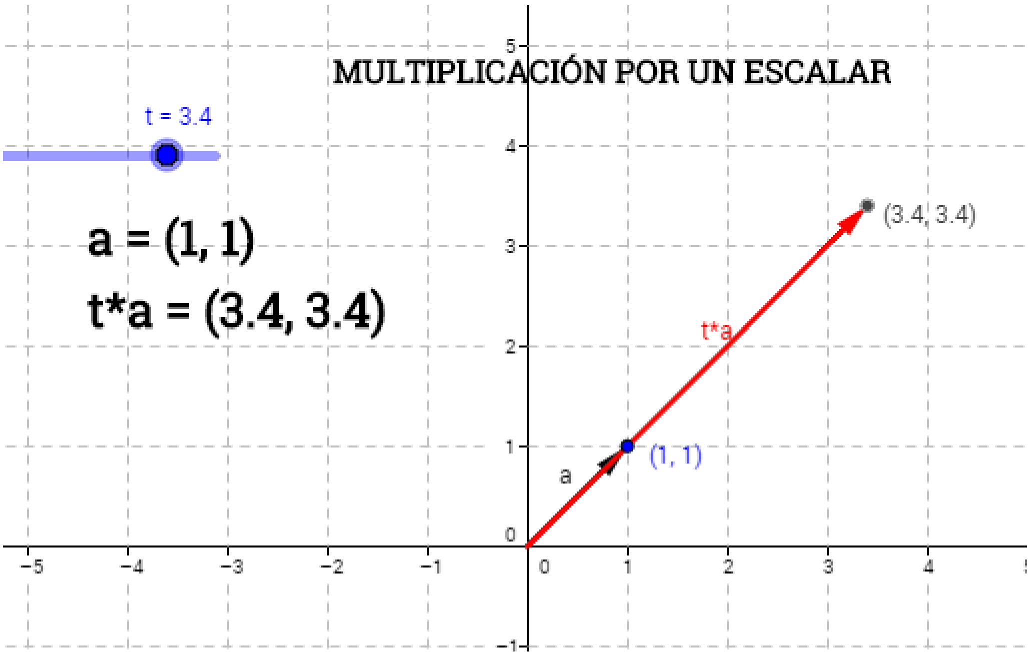
Multiplicación por un escalar

Si $\vec{a}$ es un $n-vector$ y t un número real, definimos $t\vec{a}$ como el $n-vector$ cuyas componentes son iguales a t multiplicado por las componentes correspondientes de $\vec{a}$. En símbolos,

$$t\vec{a} = t(a_1, a_2, \dots, a_n) = (ta_1, ta_2, \dots, ta_n)$$

Esta operación se llama *multiplicación por un escalar* (el escalar es el número t que se usa para "dar escala" al vector $\vec{a}$). Nótese, en particular, que si t es un número natural, entonces $t\vec{a}$ es la suma del vector $\vec{a}$ consigo mismo t veces.

INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA



Si $\vec{a}$ y $\vec{b}$ son dos $n - vectores$, **la diferencia de $\vec{a}$ y $\vec{b}$** se define por la relación

$$\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-1)\vec{b}$$

Esto implica que

$$\vec{a} - \vec{b} = (a_1, a_2, \dots, a_n) - (b_1, b_2, \dots, b_n) = (a_1 - b_1, a_2 - b_2, \dots, a_n - b_n)$$

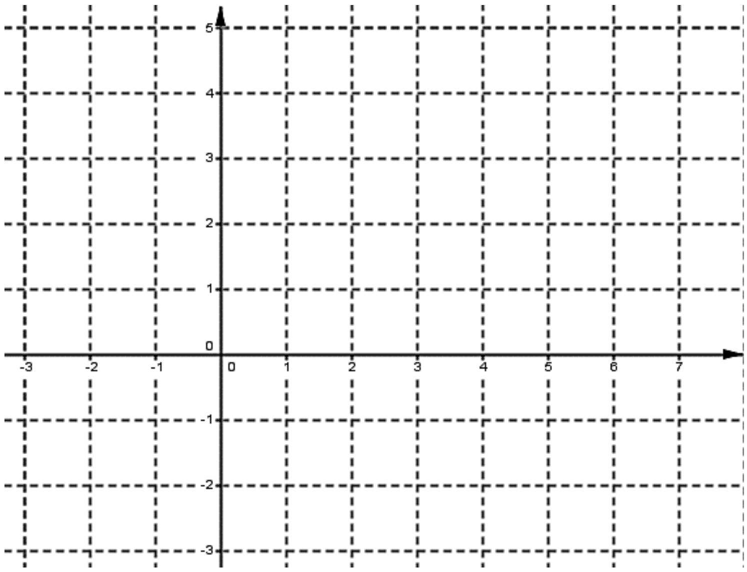
Así se obtiene $\vec{a} - \vec{b}$ restando cada componente de $\vec{b}$ de la de $\vec{a}$ que ocupa el mismo lugar.

Ejemplo

Sean $\vec{a} = (-2,3)$ y $\vec{b} = (6,1)$, calcular $\vec{a} + \vec{b}$, $\vec{a} - \vec{b}$, $3\vec{a}$, y $4\vec{a} + 3\vec{b}$

Solución

$\vec{a} + \vec{b}$



$\vec{a} - \vec{b}$

$3\vec{a}$

$4\vec{a} + 3\vec{b}$

REGLAS DE ADICIÓN DE VECTORES Y MULTIPLICACIÓN POR ESCALARES

Si $\vec{a}, \vec{b}$ y $\vec{c}$ son n-vectores arbitrarios y α, β son números reales arbitrarios, entonces

1) $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$
2) $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$
3) $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$
4) $\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$
5) $(\alpha + \beta)\vec{a} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{a}$
6) $\alpha(\vec{a} + \vec{b}) = \alpha\vec{a} + \alpha\vec{b}$
7) $\alpha(\beta\vec{a}) = (\alpha\beta)\vec{a}$
8) $1\vec{a} = \vec{a}$